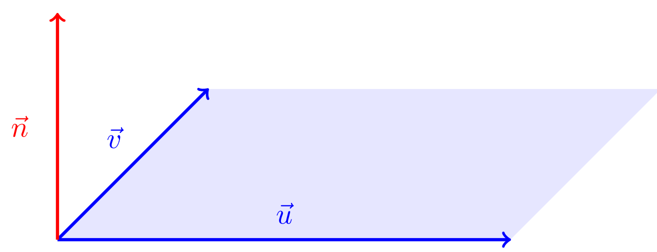
Équations paramétrique et cartésienne : approfondissement

Déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires

On se donne deux vecteurs non colinéaires de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On cherche à déterminer un vecteur $\vec{n}$ qui soit orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. En partant du fait que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est égal à 0, on va pouvoir déterminer les coordonnées de $\vec{n}$:

(1) On obtient une première équation grâce à $\vec{u}.\vec{n} = 0$.
(2) On obtient une deuxième équation grâce à $\vec{v}.\vec{n} = 0$.
(3) On exprime deux des coordonnées de $\vec{n}$ en fonction d'une troisième. On fixe alors cette troisième coordonnées pour obtenir les deux autres. On peut, évidemment, obtenir une infinité de solutions.



Exercice n°1

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que ces deux vecteurs définissent bien un plan.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. Supposons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires. Il existe donc un unique réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$.

   Cela revient à avoir le système : $\begin{cases} 2 &= \lambda \times 3 \\ -3 &= \lambda \times 1 \\ 2 &= \lambda \times (-2) \end{cases}$

   Or ce système n'admet pas de solution unique. L'hypothèse de départ est donc fausse : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et définissent bien un plan.

2. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un tel vecteur. Si $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ on a alors $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$.

   Autrement dit :

   $$\begin{cases} 2x - 3y + 2z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 0 \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3(2z - 3x) + 2z &= 0 \\ y &= 2z - 3x \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x - 4z &= 0 \\ y &= 2z - 3x \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3(2z - 3x) + 2z &= 0 \\ y &= 2z - 3x \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{4}{11}z \\ y &= \dfrac{10}{11}z \end{cases}$$

   En prenant $z = 11$, on obtient le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$