Exercices sur les nombres premiers

> Déterminer les diviseurs d'un entier, le PGCD de deux entiers

Exercice n°1

1. Calculer le PGCD de 390 et de 525. On ne notera d.
2. En déduire que $\dfrac{390}{d}$ et $\dfrac{525}{d}$ sont des entiers premiers entre eux.
3. Soit $n = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 11$ et $m = 2 \times 3^3 \times 7 \times 11^2$. Sans effectuer ces produits, calculer $\text{PGCD}\left(\dfrac{n}{66}\,;\,\dfrac{m}{66}\right)$.

Exercice n°2

1. Déterminer le PGCD de 252 et 360.
2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 315 et 825.
3. En déduire les diviseurs communs de 315 et 825.

Exercice n°3

Calculer le PGCD des nombres suivants :

a. 350 et 200. **b.** 1 800 et 7 000. **a.** 1 892 et 2 002.

Exercice n°4

Donner l'ensemble des diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de 18 et 24.

Exercice n°5

Montrer que pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 2 et par 3.

Exercice n°6

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Montrer que pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.
4. En déduire que pour tout entier naturel n, le PGCD de u_n et u_{n+1}.
5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$. Montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
6. Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.
7. Déterminer le PGCD de $4^n - 1$ et $4^{n+1} - 1$.

> Résoudre une congruence $ax \equiv b\ (n)$, déterminer un inverse

Exercice n°7

Déterminer les entiers x tels que $3x \equiv 5\ (4)$.

Exercice n°8

1. Pour tout entier naturel n, notons a le reste de la division euclidienne de $8n$ par 5. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
a					

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $8n \equiv 4\ (5)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5n \equiv 2\ (6)$.
4. Montrer que, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $6n \equiv 5\ (4)$ n'admet aucune solution.

Exercice n°9

On considère l'ensemble $A_7 = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$.

1. Pour tout élément de A_7, écrire l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1\ (7)$.

a	1	2	3	4	5	6
y						6

2. Pour tout entier relatif x, montrer que l'équation $3x \equiv 5\ (7)$ équivaut à $x \equiv 4\ (7)$.
3. Soit a un élément de A_7. Montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de $ax \equiv 0\ (7)$ sont les multiples de 7.

> Résoudre des équations diophantienne

Exercice n°10

On considère l'équation $12x + 31y = 503$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Montrer que $(-2\,;\,17)$ est un couple solution de cette équation.
2. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ tels que $12x + 31y = 503$.

Exercice n°11

On considère l'équation $51x - 26y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Justifier que cette équation admet au moins un couple solution.
2. Donner une solution particulière à cette équation.
3. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Exercice n°12

On considère l'équation $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Donner une solution particulière de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Exercice n°13 On souhaite résoudre (E) : $4x + 7y = 10$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Justifier l'existence d'entiers relatifs u et v tels que $4u + 7v = 1$.
2. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ solutions de $4u + 7v = 1$ en utilisant l'algorithme d'Euclide.
3. En déduire un couple d'entiers $(x_0\,;\,y_0)$ solution de (E).
4. Montrer que (E) $\Leftrightarrow 4(x - 20) = 7(-y - 10)$.
5. En déduire les solutions de (E).

> Exercices complets

Exercice n°14 *Pondichéry 2015*

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés les nombres de Mersenne.

1. Soient a, b et c trois entiers naturels non nul tels que PGCD$(b\,;\,c) = 1$. Prouver, à l'aide du théorème de Gauss que si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a.
2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$. A l'aide de sa calculatrice, un élève obtient :

$(2^{33} - 1) \div 3$	2863311530
$(2^{33} - 1) \div 4$	2147483648
$(2^{33} - 1) \div 12$	715827882,6

   Il affirme que 3 divise $(2^{33} - 1)$ et 4 divise $(2^{33} - 1)$ et 12 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

   (a) En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question 1 ?

   (b) Justifier en réalité que 4 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

   (c) En remarquant que $2 \equiv -1\ (3)$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

   (d) Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + ... + ((2^3)^{10}$.

   (e) En déduire que 7 divise $(2^{33} - 1)$.
3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ?
4. On donne le programme suivant où N % k donne le reste de la division euclidienne de N par k.

```
from math import*
n=int(input('valeur de n(supérieure ou égale à 3):'))
k=2
while ((2**n-1)%k!=0&k<=sqrt(2**n-1)):
    k=k+1
print(k)
if k>sqrt(2**n-1):
    print('CAS 1')
else:
    print('CAS 2')
```

   (a) Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

   (b) Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

   (c) Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?

Exercice n°15 *Antilles Guyane 2015*

Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $a\%b$ le reste dans la division euclidienne de a par b.
On considère le programme suivant :

```
a=int(input('Saisir un entier naturel a non nul'))
a=int(input('Saisir un entier naturel b non nul'))
c=a%b
while c!=0:
    a=b
    b=c
    c=a%b
print(b)
```

1. Faire fonctionner ce programme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.
2. Ce programme donne en sortie le PGCD de a et de b. Le modifier pour qu'il indique si les entiers saisis sont premiers entre eux ou non.

Partie B

A chaque lettre de l'alphabet, on associe un nombre entier entre 0 et 25 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de la façon suivante :

Étape n° 1 On choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
Étape n° 2 À la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
Étape n° 3 On calculer l'entier x' tel que $x' \equiv px + q$ (26) et $0 \leqslant x' \leqslant 25$.
Étape n° 4 À l'entier x', on associe le lettre correspondante dans le tableau.

1. Dans cette question, $p = 9$ et $q = 2$.
   (a) Montrer que la la lettre V est codée par la lettre J.
   (b) Quel théorème permet d'affirmer qu'il existe deux entiers u et v tels que $9u + 26v = 1$? Donner un couple $(u\,;\,v)$ qui convient.
   (c) Démontrer que $x' \equiv 9x + 2$ (26) équivaut à $x \equiv 3x' + 20$ (26).
   (d) Décoder la lettre R.
2. Dans cette question, on prend $q = 2$ et p est inconnue. On sait que J est codée par la lettre D. Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).
3. Dans cette question, $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?