Schéma de Bernoulli, loi Binomiale

1 Succession d'épreuves indépendantes

Définition : épreuve indépendante

On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si les issues de l'évènements A (ou B) n'influent pas les issues de B (ou A).

Propriété

A et B sont deux évènements indépendants si et seulement si :

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$$

Définition : succession d'épreuves indépendantes

Soit n un entier naturel non nul.
Soit une **succession** de n épreuves indépendantes dont les univers associés sont Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n.
L'univers associé Ω à cette succession de n épreuves est le produit cartésien :

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$$

Théorème : probabilité d'une succession d'épreuves indépendantes

Soit n un entier naturel non nul.
Soit une succession de n épreuves indépendantes de lois de probabilité p_1, p_2, ..., p_n.

La probabilité de l'évènement $(x_1$, x_2, ..., $x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x :

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = p(x_1) \times p(x_2) \times ... \times p(x_n)$$

Exemple

On lance un pièce de monnaie. Si le résultat est face, on lance un dé à 6 faces. Si la face obtenue est 6, on gagne 2€. Sinon, on perd 1€. Si le résultat au lancer de pièce est pile, on lance un dé à 4 faces. Si le résultat est 4, on gagne 1€. Sinon, on perd 3€.

On souhaite déterminer la probabilité de gagner 2€. On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

Suite de l'exemple

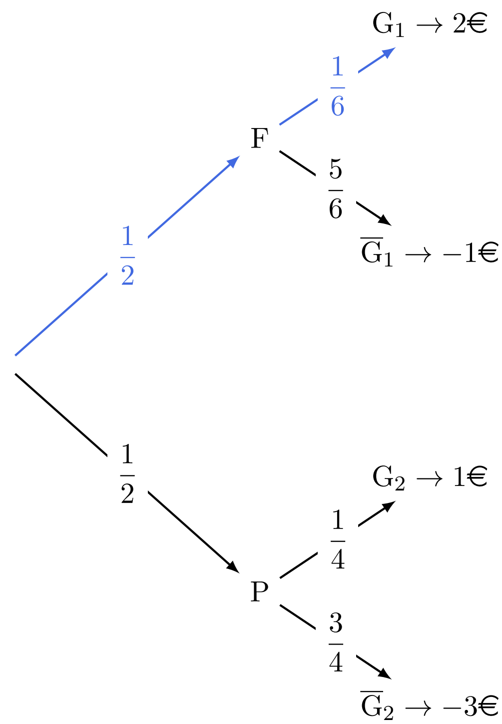
La probabilité qui nous intéresse est $p(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}_1)$.

On a $p(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}_1) = p(\mathrm{F}) \times p(\mathrm{G}_1)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{12}$$

La probabilité de gagner 2€ est de $\frac{1}{12}$.



2 Epreuve et schéma de Bernoulli

Définition : épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues. Une que l'on nomme **succès**, souvent notée S et une autre que l'on nomme **échec** que l'on note E ou $\overline{\mathrm{S}}$.

Exemple

On lance une pièce de monnaie et on note S : « Obtenir pile » et E : « Obtenir face ».
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

Théorème : Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli prenant la valeur 1 pour un succès et 0 pour un échec.
On note p la probabilité du succès.

On dit que X est une **variable de Bernoulli** de paramètre p ou que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p.

x_1	0	1
$p(X = x_i)$	$1-p$	p

On a alors :

$$E(X) = p,\ V(X) = p(1-p) \text{ et } \varphi(X) = \sigma p(1-p)$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, $p = 0,5$.
On a alors $E(X) = 0,5$, $V(X) = 0,25$ et $\sigma(X) = 0,5$

Définition : schéma de Bernoulli

On appelle **schéma de Bernoulli** la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple

Si on lance 7 fois la pièce de monnaie, on obtient un schéma de Bernoulli de 7 répétitions de l'épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,5$.

3 La loi Binomiale

Définition : épreuve de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de paramètre p à n épreuves.
La loi de probabilité de X est appelée la **loi binomiale** de paramètres n et p.
On la note $\mathcal{B}(n\,;\,p)$.

Exemple

On lance trois fois de suite un dé à 6 faces. On note S : « obtenir le 4 ».
On note X la variable aléatoire comptant le nombre de succès de cette répétition de 3 épreuves de Bernoulli.
X suit donc la loi $\mathcal{B}\left(3\,;\,\frac{1}{6}\right)$.
On va représenter cette situation à l'aide d'un arbre.

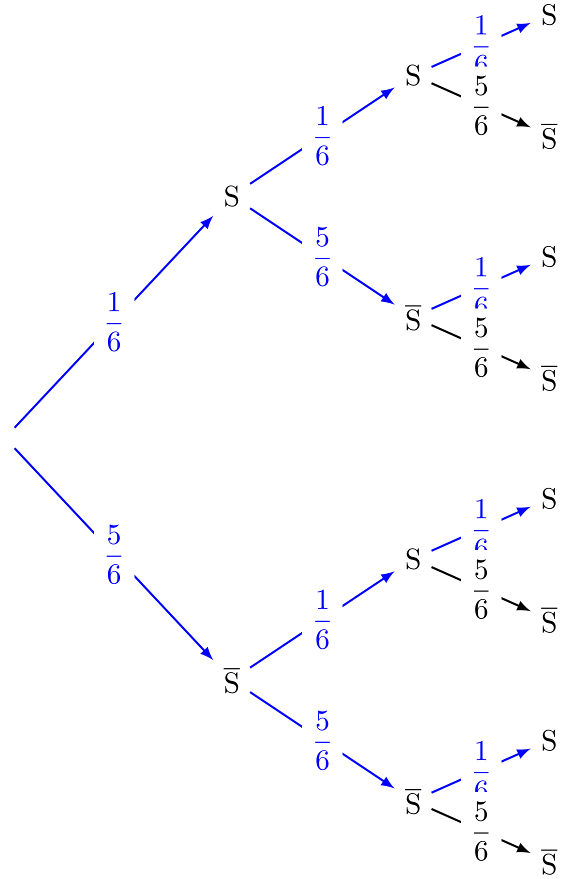
Suite de l'exemple

A l'aide de l'arbre ci-contre, on obtient la loi de probabilité de X, que l'on représente dans le tableau ci-dessous.

Par exemple, la probabilité d'obtenir le succès 3 fois est de $\dfrac{1}{216}$.

On peut calculer l'espérance de X :

$E(X) = \dfrac{125}{216} \times 0 + \dfrac{75}{216} \times 1 + \dfrac{15}{216} \times 2 + \dfrac{1}{216} \times 3 = 0,5.$



k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{125}{216}$	$3 \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{75}{216}$	$3 \times \dfrac{5}{6} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{15}{216}$	$\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{216}$

Définition : coefficient binomial

On considère un schéma de n épreuves de Bernoulli représenté par un arbre pondéré.
Soit k en entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
On note $\dbinom{n}{k}$ le nombre de chemins de l'arbre réalisant exactement k succès lors des n répétitions.
Ce nombre est appelé **coefficient binomial**. On lit aussi ***k* parmi *n***.

Propriétés

Soit n un entier naturel. On rappelle les propriétés suivantes vues dans le chapitre « Combinatoire et dénombrement » :

$\dbinom{0}{0} = 1$ $\quad \dbinom{n}{0} = 1$ $\quad \dbinom{n}{n} = 1$ $\quad \dbinom{n}{1} = n$ $\quad \dbinom{n}{n-1} = n$

Propriétés

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;\,p)$. La probabilité d'obtenir exactement k succès est :

$$p(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$$

De plus :

$$E(X)=np \quad ; \quad V(X)=np(1-p) \quad ; \quad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$$

Démonstration pour la formule de probabilité

Dans un schéma de Bernoulli, un chemin comportant k succès comporte $n-k$ échecs. La probabilité d'un succès est de p et celle d'un échec est de $1-p$.

La probabilité d'un tel chemin est donc de $p^k\times(1-p)^{n-k}$.

Le nombre de chemins à k succès est de $\binom{n}{k}$.

Finalement, $p(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$.

Exemple

Reprenons l'exemple des trois lancers de dé précédent. Nous allons cette fois utiliser la formule de la propriété précédente.

$p(X=2)=\binom{3}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(1-\frac{5}{6}\right)^{3-2}=\frac{15}{216}$.

On retrouve également $E(X)=np=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

4 Représentation de la loi Binomiale

Exemple

On considère une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{B}(n\,;\,p)$.

Pour $n = 8$ et $p = 0,5$, on obtient la loi de probabilité suivante :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(X = k)$	0,004	0,031	0,109	0,219	0,273	0,219	0,109	0,031	0,004

Pour $n = 8$ et $p = 0,2$, on obtient la loi de probabilité suivante :

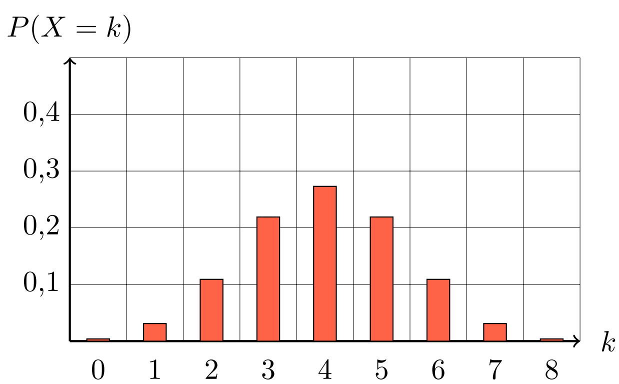
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(X = k)$	0,168	0,336	0,294	0,147	0,046	0,009	0,001	0,00008	0,000002

Pour $n = 8$ et $p = 0,8$, on obtient la loi de probabilité suivante :

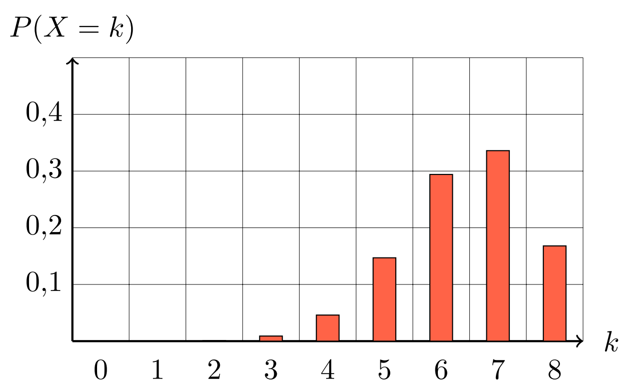
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(X = k)$	0,000002	0,00008	0,001	0,009	0,046	0,147	0,294	0,336	0,168

Voici les représentations graphiques de ces trois tableaux :

Pour $n = 8$ et $p = 0,5$



Pour $n = 8$ et $p = 0,8$



Pour $n = 8$ et $p = 0,2$