Manipulation des vecteurs, droites et plans de l'espace

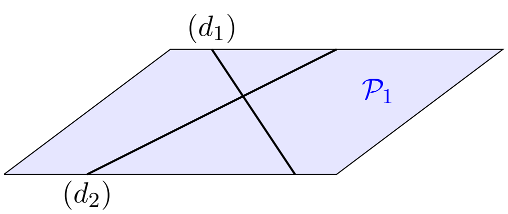
1 Positions relatives dans l'espace

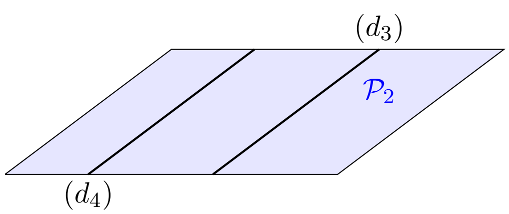
Définition : Droites coplanaires

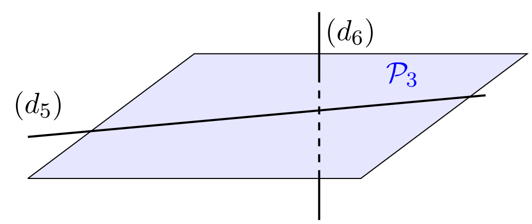
Soit (d) et (d') deux droites de l'espace.

On dit que (d) et (d') sont **coplanaires** lorsqu'elles appartiennent à un même plan. Dans ce cas, elles sont soit sécantes soit parallèles (disjointes ou confondues).
Dans le cas contraire, on dit qu'elles sont **non coplanaires**.

Exemples







(d_1) et (d_2) sont coplanaires car elles appartiennent au même plan $\mathcal{P}_1$. Elles sont sécantes.

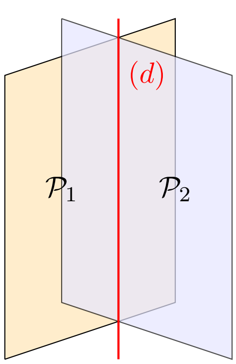
(d_3) et (d_4) sont coplanaires car elles appartiennent au même plan $\mathcal{P}_2$. Elles sont parallèles disjointes.

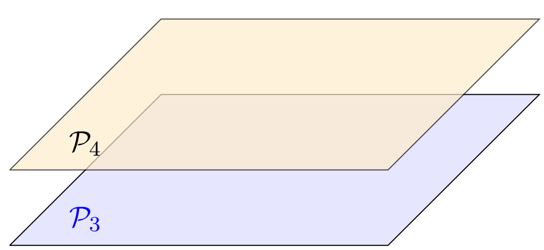
(d_5) et (d_6) ne sont pas coplanaires car elles n'appartiennent au même plan.

Propriété : Intersection de plans

Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

Exemples Sur les figures ci-dessous, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants en (d) et les plans $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$ sont strictement parallèles.

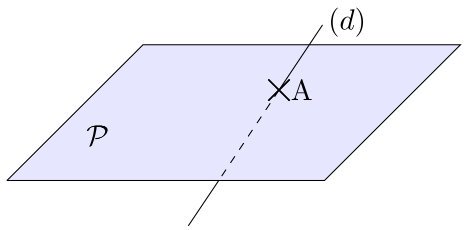


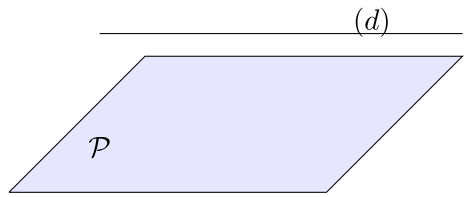


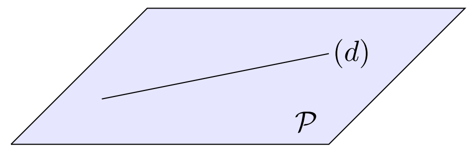
Propriété : Intersection d'une droite et d'un plan

Un plan et une droite sont soit sécants soit parallèles.

Exemples







$\mathcal{P}$ et (d) sont sécants en A.

$\mathcal{P}$ et (d) sont strictement parallèles.

(d) est incluse dans $\mathcal{P}$.

2 Vecteurs de l'espace

Définition : Vecteur

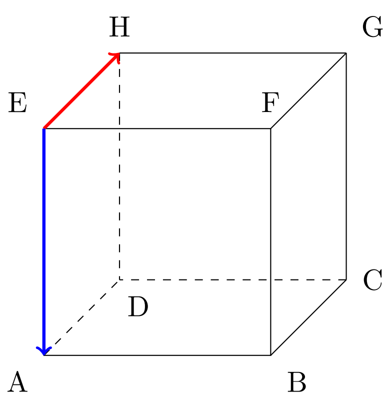
Soient deux points de l'espace A et B. On appelle **vecteur $\overrightarrow{AB}$** l'objet défini par :

- une direction (celle de la droite (AB))
- un sens (celui qui va de A vers B)
- une norme (qui est égal à la longueur AB que l'on note $\|\overrightarrow{AB}\|$)

Définition : Translation

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur.
La **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

Exemples



G est l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$.
C est l'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$.

Remarques On étend à l'espace la notion de vecteur définie dans le plan. Ainsi, les vecteurs suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : somme, produit par un réel, relation de Chasles.

Définition : Combinaison linéaire

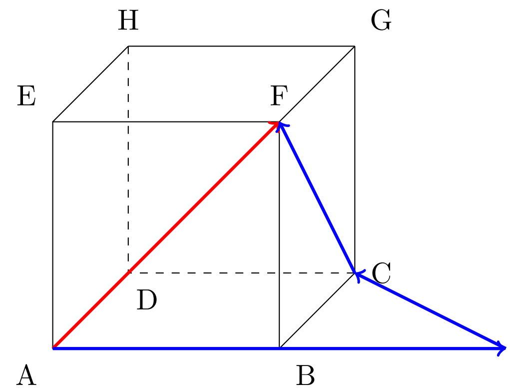
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On appelle **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tout vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ où α et β sont deux réels.

Remarque Dans la définition, $\vec{w}$ est une combinaisons linéaires de deux vecteurs mais on peut faire des combinaisons linéaires de trois vecteurs ou plus.

Exemples

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$
$\overrightarrow{AG}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}$ avec $\alpha = \beta = 1$.

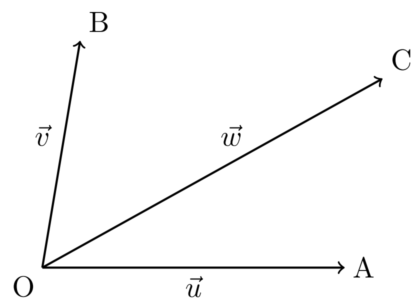
$\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$
$\overrightarrow{AF}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FC}$. Ici, les coefficients sont 2, 1 et -1.



Définition : Vecteurs coplanaires

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsqu'il existe quatre points A, B, C et D appartenant à un même plan et tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Exemple Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ci-dessous sont coplanaires.



Propriété : Vecteurs coplanaires

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

3 Droites et plans de l'espace

Définition : Vecteur directeur d'une droite

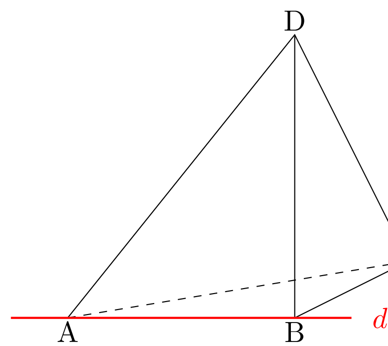
On appelle **vecteur directeur** d'une droite (d) de l'espace tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace ayant la même direction que celle de la droite (d).

Exemple

Ici, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

C'est aussi le cas du vecteur $\overrightarrow{BA}$ ou même du vecteur $\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.

En revanche, le vecteur $\overrightarrow{DC}$ n'est pas un vecteur directeur de la droite (d).



Propriété : Caractérisation d'une droite

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par un point A. Soit M un point de l'espace.
M appartient à (d) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Propriété : Droites parallèles

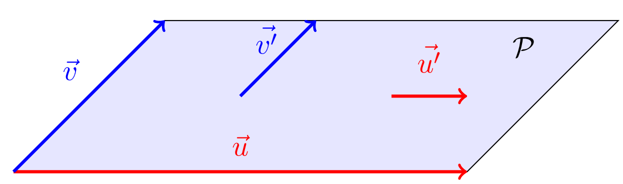
Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et soit (d') une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.
Les droites (d) et (d') sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Définition : Direction d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.
On appelle **direction** de $\mathcal{P}$ tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de $\mathcal{P}$.

Exemple

$\mathcal{P}$ est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On peut aussi dire $\mathcal{P}$ est dirigé par $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$.

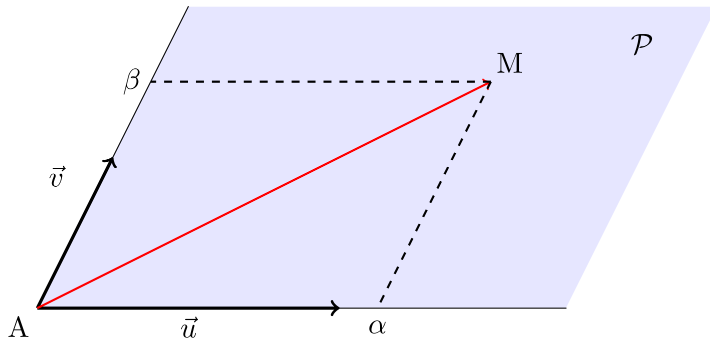


Propriété : Caractérisation d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par un point A et dirigé par un couple de vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Soit M un point de l'espace.
M appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Autrement dit, M appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } beta \in \mathbb{R}.$$

Exemple



Démonstration Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- Soient deux points B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
  Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $(\mathrm{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ est un repère de (ABC). Dans ce repère, tout point $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ est tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

- Réciproquement, soit M un point de l'espace défini par $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
  Soit N le point du plan (ABC) de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans le repère $(\mathrm{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$. On a alors $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et donc $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}}$.
  M et N sont confondus et donc M appartient à (ABC).

Propriété : Plans parallèles

Si deux plans sont définis par le même couple de vecteurs non colinéaires alors ils sont parallèles.

Démonstration Soient $\mathcal{P} : (\mathrm{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ et $\mathcal{P}' : (\mathrm{B}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

- Si les deux plans sont confondus, la démonstration est évidente.
- Supposons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne soient pas confondus. Supposons qu'ils aient un point commun M.
  Dans le plan $\mathcal{P}$ on a alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où $(x\,;\,y)$ sont les coordonnées de M dans $\mathcal{P}$.
  Dans le plan $\mathcal{P}'$ on a alors $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$ où $(x'\,;\,y')$ sont les coordonnées de M dans $\mathcal{P}'$.
  On a alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x - x')\vec{u} + (y - y')\vec{v}$ ce qui signifie que B appartient à B. Donc $(\mathrm{B}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ est aussi un repère de $\mathcal{P}$ et donc les deux plans sont confondus. Cela contredit notre hypothèse de départ.
  Ainsi, les deux plans n'ont aucun point en commun : ils sont donc parallèles.

Exemple SABC est une pyramide à base triangulaire. I, J et K sont les milieux respectifs de [SA], [SB] et [SC].

On souhaite montrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles. En utilisant la précédente propriété, on va devoir montrer que $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{IJ}}$ sont colinéaires et que $\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{JK}}$ le sont également. On aurait pu aussi choisir les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}$.

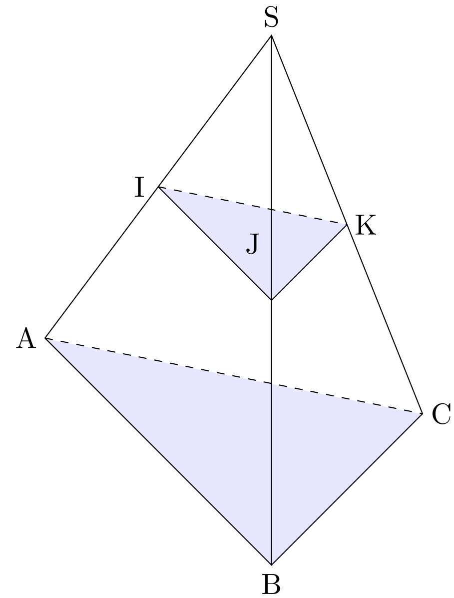
$\overrightarrow{\text{IJ}} = \overrightarrow{\text{IS}} + \overrightarrow{\text{SJ}}$

$= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AS}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{SB}}$

$= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\text{AS}} + \overrightarrow{\text{SB}})$

$= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}$. Donc ces deux vecteurs sont colinéaires.

On montre de même que $\overrightarrow{\text{JK}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{BC}}$ et donc que ces deux vecteurs sont aussi colinéaires.



On a donc montrer que deux vecteurs non colinéaires de (IJK), $\rightarrow IJ$ et $\overrightarrow{\text{JK}}$ sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de (ABC), $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$.
Les plans (IJK) et (ABC) sont donc parallèles.

4 Bases et repères de l'espace

Propriété : Décomposition d'un vecteur

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet de réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Démonstration Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace. Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

- Démontrons l'existence. Soient $\overrightarrow{\text{AB}}$ un représentant de $\vec{u}$.
  Soit $\mathcal{P}$ le plan de repère $(\text{A}\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$. Si B appartient à $\mathcal{P}$ alors le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ se décompose selon les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
  Supposons que B n'appartienne pas au plan $\mathcal{P}$. Soit (d) la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{k}$. Puisque $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires alors $\vec{k}$ n'est pas colinéaires avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Ainsi, la droite (d) coupe $\mathcal{P}$ en un point C. On peut alors écrire $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{AC}} + \overrightarrow{\text{CB}}$.
  $\overrightarrow{\text{AC}}$ appartient à $\mathcal{P}$ donc il existe un couple de réels $(x\,;\,y)$ tel que $\overrightarrow{\text{AC}} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
  $\vec{k}$ et $\overrightarrow{\text{CB}}$ sont colinéaires donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{\text{CB}} = z\vec{k}$. Ainsi, $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{AC}} + \overrightarrow{\text{CB}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

- Démontrons l'unicité. Supposons que $\vec{u}$ puisse s'écrire de deux façons différentes :
  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.
  On a alors $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ soit $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$.
  Supposons que l'une, au moins, des trois différences précédentes ne soit pas nulle. Par exemple, que $z - z' \neq 0$.
  On peut alors écrire : $\vec{k} = \dfrac{x' - x}{z - z'}\vec{i} + \dfrac{y' - y}{z - z'}\vec{j}$. Cela veut donc dire que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont coplanaires, ce

qui est faux par hypothèse.
On a donc forcément $x - x' = 0$ et $y - y' = 0$ et $z - z' = 0$ et donc $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

Définition : Base de l'espace

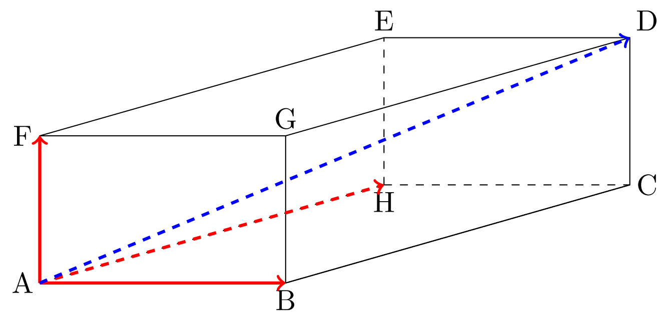
On appelle **base de l'espace** un triplet de vecteurs non coplanaires.

Exemple

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ ne sont pas coplanaires.

Ils forment donc une base de l'espace.

Dans cette base, on peut écrire $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}$.



Définition : Repère de l'espace

On appelle **repère de l'espace** un quadruplet composé d'un point O et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
Le point O est l'**origine du repère** et le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la base de l'espace.
On note alors le repère $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Propriété : Coordonnées dans l'espace

Soit $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.
Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et soient x, y et z trois réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + k\vec{k}$.
Le triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ représente les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{u}$ alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ représente également les coordonnées du point M dans la base $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition : Coordonnées dans l'espace

Soit M le point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

x est l'**abscisse** de M, y est son **ordonnée** et z est appelé l'**altitude** de M ou encore **cote** du point M.

Remarque Toutes les propriétés de calcul à l'aide des coordonnées vues dans un repère du plan sont également valable dans un repère de l'espace.

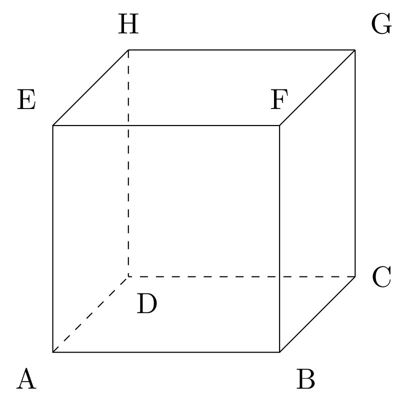
Exemple

Sur la figure ci-contre, on définit le repère $(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

On a donc $\mathrm{A}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathrm{D}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{E}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

On a également $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont donc $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.



De même, les coordonnées de G sont $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Pour déterminer les coordonnées du milieu de [AG], on peut utiliser la formule vue l'an dernier en géométrie repérée soit $\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0,5\end{pmatrix}$.