Nombre complexe : inégalité triangulaire

Étude d'une suite de nombres complexes

Élément de programme travaillé dans la partie « Problèmes possibles ».
Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes ; cas d'égalité.

Exercice n°1 Soient a et b deux nombres complexes.

On rappelle que pour tout z dans $\mathbb{C}$ on a :

- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
- $\text{Re}(z) \leqslant |z|$.

1. En considérant $|a+b|^2$, montrer que $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.
2. En utilisant la précédente inégalité triangulaire, montrer que $||a| - |b|| \leqslant |a+b|$.
3. Montrer que si a et b sont deux complexes tels que $|a+b| = |a| + |b|$ alors $a = 0$ ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $b = \lambda a$.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. $$\begin{aligned}|a+b|^2 &= (a+b)\overline{(a+b)}\\ &= a\bar{a}+b\bar{b}+a\bar{b}+\bar{a}b\\ &= |a|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}(a\bar{b})\\ &\leqslant |a|^2+|b|^2+2|a||b|\\ &= (|a|+|b|)^2.\end{aligned}$$

   Par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ on obtient bien $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

2. D'après la précédente inégalité triangulaire :

$$\begin{cases} |a| & = |a+b-b| \leqslant |a+b|+|b| \\ |b| & = |a+b-a| \leqslant |a+b|+|a| \end{cases}$$

   Ce qui nous donne donc :

$$\begin{cases} |a|-|b| & \leqslant |a+b| \\ |b|-|a| & \leqslant |a+b| \end{cases}$$

   Puisque $||a|-|b|| = \max(|a|-|b|, |b|-|a|)$ on obtient bien $||a|-|b|| \leqslant |a+b|$.

3. Soient deux nombres complexes a et b tels que $|a+b| = |a|+|b|$. En passant au carré on obtient :

$$\begin{aligned} & |a+b|^2 = (|a|+|b|)^2 \\ \Leftrightarrow\ & |a|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}(a\bar{b}) = |a|^2+|b^2|+2|a||b| \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Re}(a\bar{b}) = |a||b| \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Re}(a\bar{b}) = |a\bar{b}| \\ \Leftrightarrow\ & a\bar{b} \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow\ & b=0 \text{ ou s'il existe } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } a = \frac{\lambda}{\bar{b}}. \end{aligned}$$

   Or $\dfrac{\lambda}{\bar{b}} = \dfrac{\lambda \times b}{b\bar{b}} = \dfrac{\lambda}{|b|^2} \times b = \lambda' b$.