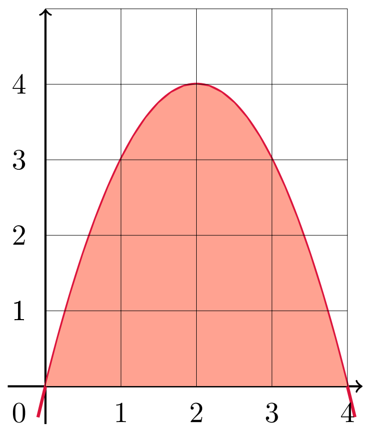
# Exercices sur l'intégration (2)

## > Déterminer une valeur moyenne

**Exercice n°1** On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $f$.




Donner une estimation de la valeur moyenne de $f$ entre 0 et 4.

**Exercice n°2** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.

Détermine la valeur moyenne de $f$ sur $[2\,;\,5]$.

**Exercice n°3** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\pi x)$.

1. Montrer que $f$ est périodique.
2. Déterminer une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la valeur moyenne de $f$ sur $[-1\,;\,1]$.

**Exercice n°4**

La capacité pulmonaire, en litres, de l'être humain suivant son âge $x$ de 10 à 90 ans, peut être modélisé au moyen de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{110(\ln(x) - 2)}{x}$.

Déterminer la valeur moyenne de la capacité pulmonaire entre 20 et et 70 ans, à 0,1 litre près.

## > Encadrer une intégrale

**Exercice n°5** Soit $f$ la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$.

1. Justifier que pour tout réel $x\geqslant 1$, $0\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.
2. Justifier que la fonction $G$ définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $G(x)=\dfrac{-\ln(x)-1}{x}$ est une primitive de $x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur $[1\,;\,+\infty[$.
3. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Exercice n°6** Démontrer les encadrements suivants :

1. $\dfrac{1}{5}\leqslant\displaystyle\int_1^3\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1$.
2. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\leqslant\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\leqslant\frac{1}{2}$.

## > Intégrer par parties

**Exercice n°7** Déterminer les intégrales suivantes :

**a.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_1^{e^2}\ln(x)\,\mathrm{d}x$

**Exercice n°8** Déterminer les intégrales suivantes :

**a.** $\displaystyle\int_0^1 (x+2)e^x\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_1^2 (t-2)e^{2t}\,\mathrm{d}t$ **c.** $\displaystyle\int_1^e x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$

## > Aire entre deux courbes

**Exercice n°8** On considère les deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ et $g(x)=\dfrac{(\ln(x))^2}{x}$.

1. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. Déterminer l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$.

**Exercice n°9** On considère les deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-5x^2-5x-1$ et $g(x)=-4x^2-5x-10$.

Déterminer l'aire entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x=-5$ et $x=3$.

## > Etudier une suite d'intégrales

**Exercice n°10** Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$. Cette suite converge-t-elle ?
2. Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{\ln(2)}{n+1}$.
   En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice n°11** Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $u_0+u_1=1$.
2. Calculer $u_1$ puis en déduire $u_0$.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n\geqslant 0$.
4. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}+u_n=\dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
5. En déduire que pour tout $n>0$, $u_n\leqslant\dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
6. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice n°12** Soit $(I_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^ne^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $I_0$.
2. Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante sur $\mathbb{N}$.
3. En déduire que la suite $(I_n)$ converge.
4. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $I_n\leqslant\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.
5. En déduire la limite de la suite $(I_n)$.