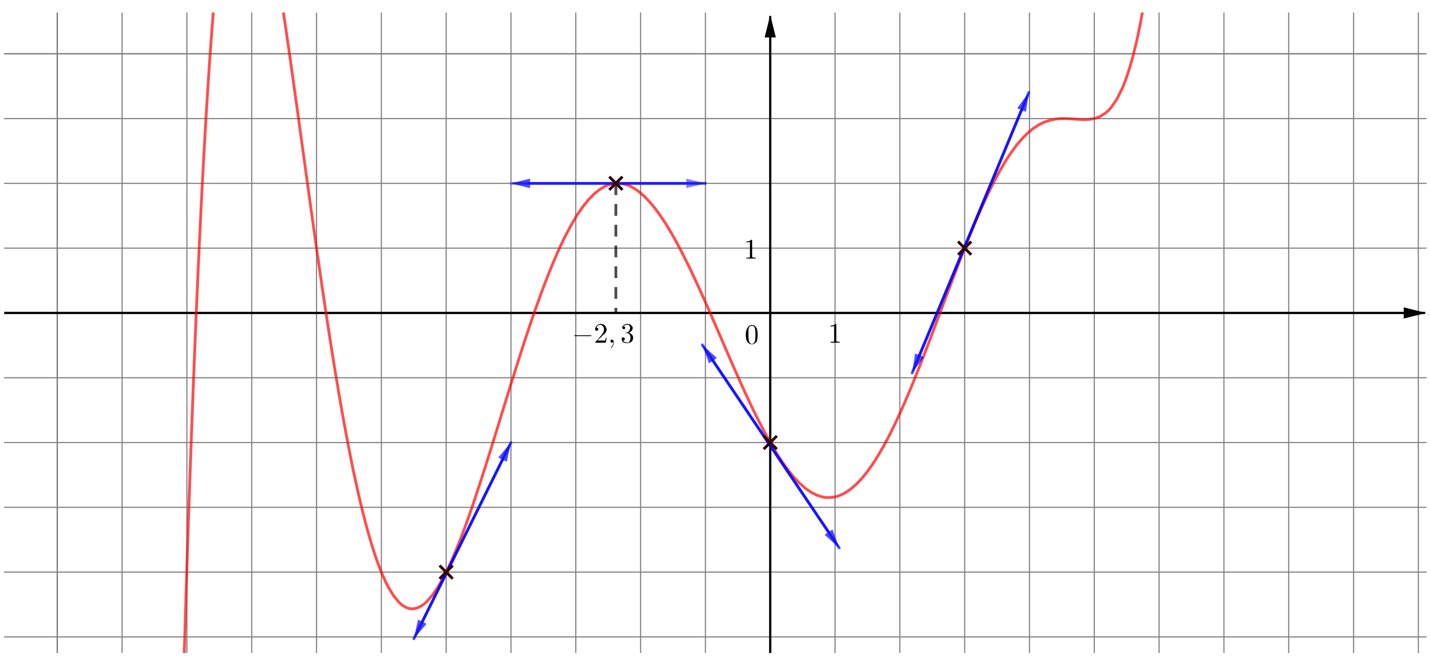
Exercices sur la dérivation : le cas local

> Taux d'accroissement et nombre dérivé

Exercice n°1

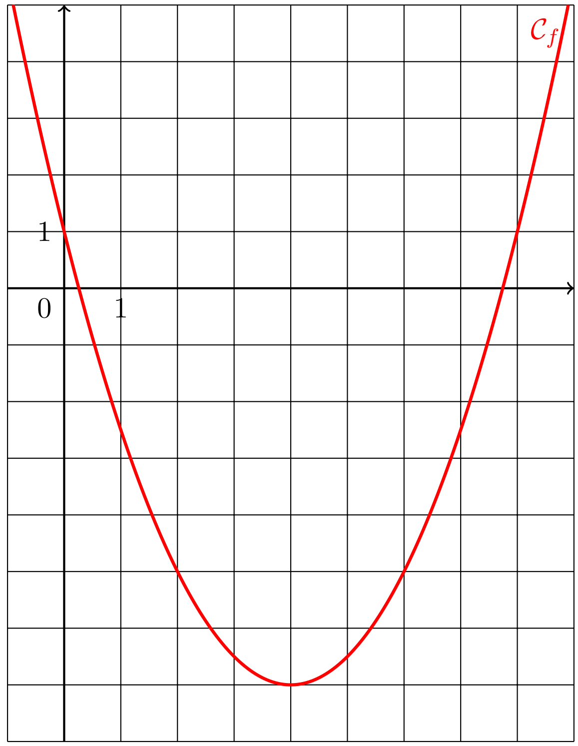
1. Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$ en $a = 3$.
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 1$ en $a = 2$.
3. Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $a = -1$.
4. Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ en $a = 4$.
5. Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3$ en $a = 5$.

Exercice n°2 On a représentée ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f et certaines de ses tangentes.



1. Rappeler l'interprétation graphique de $f'(3)$.
2. Lire graphiquement $f'(3)$.
3. Lire graphiquement $f'(-5)$, $f(-2,3)$ et $f'(0)$.

Exercice n°3 On considère une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



En utilisant votre règle pour matérialiser les tangentes à $\mathcal{C}_f$, donner des valeurs approchées de $f'(2)$, $f'(4)$ et $f'(6)$.

Exercice n°4

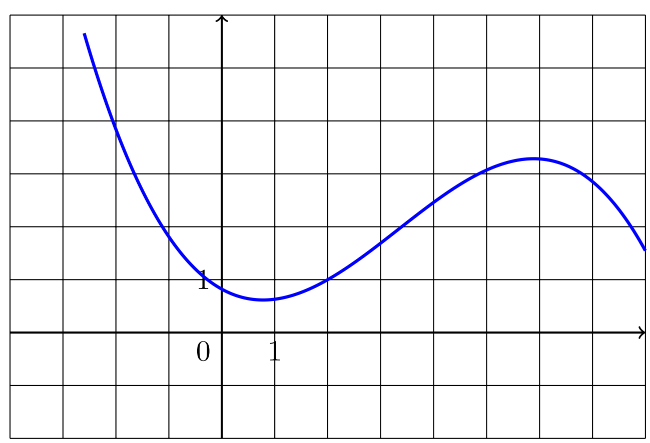
Jean-Kevin tire dans un ballon de football et essaye de le passer par dessus les grilles de son lycée (oui, Jean-Kevin n'est pas très malin). Pendant la phase ascendante, la hauteur du ballon, en mètres, de cet objet à l'instant t est donnée par l'expression $f(t) = -5t^2 + 7t + 1$. A l'instant $t = 0$ seconde, Jean-Kevin se situe sur une petite plateforme.

1. Quelle est la hauteur de cette plateforme ?
2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ? Au bout de combien de temps ?
3. Calculer le taux d'accroissement de la fonction f entre t et $h \in \mathbb{R}$.
   En déduire la vitesse instantanée du ballon à $t = 0$ seconde.
4. Déterminer la vitesse instantanée du ballon quand il atteint sa hauteur maximale.

Exercice n°5

La courbe représentative ci-dessous est celle d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer graphiquement les valeurs de a telles que $f'(a) = 0$.



Exercice n°6

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
   Montrer que f est dérivable en 2.
2. La fonction racine carrée est-elle dérivable en -1 ?
3. La fonction racine carrée est-elle dérivable en 1 ?

> Nombre dérivé et tangente

Exercice n°7

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -4x^2 + 6x - 1$. Déterminer la pente de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 3.
2. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction racine carrée au point d'abscisse 4.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 3x$. Déterminer la pente de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0.

Exercice n°8

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction carrée au point d'abscisse 2.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction inverse au point d'abscisse 1.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction racine carrée au point d'abscisse 4.
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 6$. Sachant que $f'(7) = -238$, déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 7.

Exercice n°9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$.

1. Montrer que $\mathrm{A}\left(-1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.
2. Déterminer une équation réduire de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.
3. Montrer que pour tout réel x on a $f(x) - \left(-x - \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{(x+1)^2(2x+1)}{2x^2+2}$.
4. Etudier le signe de ce quotient puis interpréter cette étude en terme de positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.