Quelques démonstrations supplémentaires

> Unicité de la fonction exponentielle

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration

Supposons qu'il existe une autre fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$ et $g' = g$.
On sait que pout tout réel x $e^x \neq 0$. On peut donc poser pour tout réel x $q(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$.

$$q'(x) = \frac{g'(x)e^x - g(x)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{g(x)e^x - g(x)e^x}{(e^x)^2} = 0$$

q est donc une fonction constante et, en particulier, $q(x) = q(0) = \dfrac{g(0)}{e^0} = 1$.

Donc pour tout réel x : $q(x) = 1$ autrement dit $g(x) = e^x$. L'hypothèse initiale est donc fausse et il y a bien unicité de la fonction exponentielle.

> Propriété multiplicative

Pour tout x et y réels, on a $e^{x+y} = e^x e^y$.

Démonstration

$\forall x \in \mathbb{R} e^x > 0$. Posons $f(x) = \dfrac{e^{x+y}}{e^x}$ où y est un réel.

$$f'(x) = \frac{(e^{x+y})'e^x - e^{x+y}(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^{x+y}e^x - e^{x+y}e^x}{(e^x)^2} = 0$$

f est donc une fonction constante et, en particulier $f(0) = \dfrac{e^{0+y}}{e^0} = e^y$. On a ainsi $\dfrac{e^{x+y}}{e^x} = e^y$ ou encore $e^{x+y} = e^x e^y$.

> Stricte positivité et stricte croissance

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $e^x > 0$.

Démonstration

- $\forall x \in \mathbb{R} : e^x = e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geqslant 0$
  Puisque la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $e^x > 0$.

- La fonction exponentielle ne s'annule jamais. Par définition $e^0 = 1$ et $e^x > 0$ pour tout réel x.
  De plus, $(e^x)' = e^x > 0$. La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.