Exercices sur les polynômes du second degré (2)

> Résoudre une équation du second degré

Exercice n°1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $2x^2 - 12x + 18 = 0$ **b.** $x^2 - x + 6 = 0$ **c.** $3x^2 + 4x - 1 = 0$ **d.** $2x^2 - x + 1 = 0$

Exercice n°2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x^2 + 5x + 3 = 2x + 3$ **b.** $(2t + 1)(t - 4) = t^2 - 4t - 6$

c. $(t + 2)^2 = 2t^2 + 5t - 2$ **d.** $(x + 1)(x + 2) = (x + 3)(x + 4)$

Exercice n°3 Déterminer les éventuels points d'intersection des paraboles suivantes avec l'axe des abscisses.

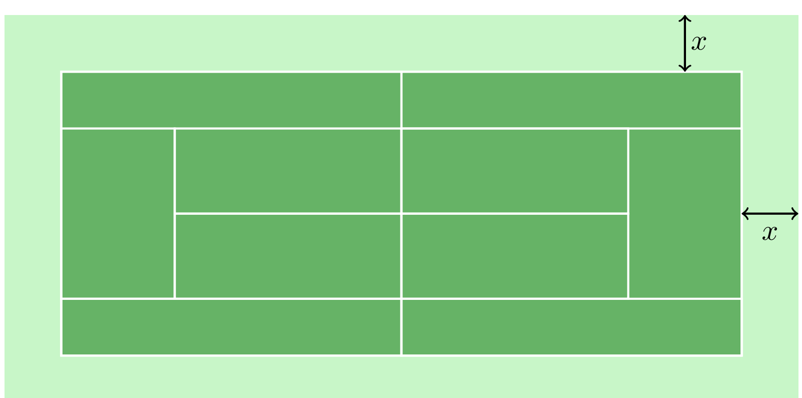
a. $y = x^2 - 4x + 3$ **b.** $y = 3x^2 + 2x + 3$ **c.** $y = x^2 + 2x$

Exercice n°4 On considère les courbes $\mathcal{C}_1 : y = x^2 + 3x + 3$ et $\mathcal{C}_2 : y = x + 2$.

1. Représenter l'allure des deux courbes dans un repère (feuille ou calculatrice).
2. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $x^2 + 3x + 3 = x + 2$.
3. Résoudre cette équation par le calcul.

Exercice n°5

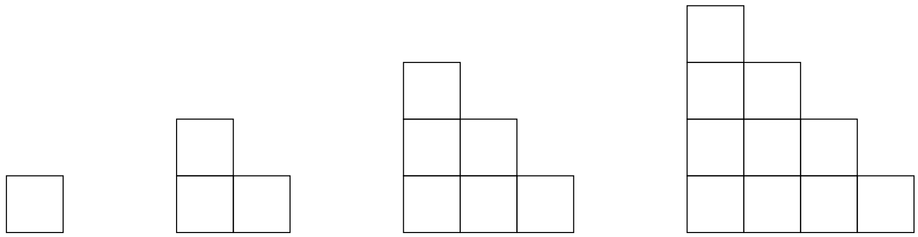
On considère un terrain de tennis de taille 23,77 m par 10,97 m. On souhaite construire une bande de circulation autour de celui-ci, de largeur constante x et dont l'aire est égale à celle du terrain de tennis.



Déterminer la largeur de cette bande.

Exercice n°6

Certains mathématiciens grecs représentaient géométriquement les nombres. Ci-dessous, des nombres triangulaires.



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$

1. Représenter sur la feuille ou le cahier le 5$^{\text{ème}}$ nombre triangulaire.
2. Sur Géogébra, recopier le tableur ci-contre et faire afficher le nuage de points correspondant.
3. A quel type de courbe ces points semblent-ils appartenir ?

	A	**B**
1	n	T_n
2	1	1
3	2	3
4	3	6
5	4	10
6	5	15

4. On cherche une fonction f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont à trouver. On souhaite que la courbe représentative de f passent par les points de la question 2.
   Que doivent valoir $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$?
5. En déduire l'expression de $f(x)$.
6. Tester la solution trouvée sur Géogébra.
7. Quelle formule peut-on donner pour T_n en fonction de l'entier naturel n ?

Exercice n°7

Soit $\mathcal{P}$ la parabole représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5x + 4$ et soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + m$ où m est un nombre réel.

1. Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ en fonction des valeurs de m.
2. Lorsqu'il existe un unique point d'intersection, donner ses coordonnées.
3. Lorsqu'il existe deux points d'intersection distincts, détermine l'abscisse du milieu du segment les joignant.

> Factorisation et étude du signe d'un trinôme du second degré

Exercice n°8

Factoriser, si possible, les polynômes suivants :

a. $2x^2 - 7x - 4$ **b.** $5x^2 - 10x + 6$ **c.** $-2x^2 - 3x + 5$ **d.** $-x^2 + 6x - 10$

Exercice n°9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -7x^2 - 35x + 42$.

1. Trouver une racine évidente de f.
2. Sans calculer le discriminant de f, trouver la seconde racine de f.

Exercice n°10 On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1}$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice. De quel type de représentation s'agit-il ?
2. Factoriser $-x^2 + 3x + 4$.
3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$. Cette expression est-elle valable pour tout réel x ?

Exercice n°11 On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 9x$.

1. Donner une racine évidente du polynôme P.
2. Factoriser le polynôme P en un produit de trois polynômes de degré 1.
3. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice n°12 Dresser le tableau de signes des polynômes suivants :

a. $2x^2 - 5x + 7$ **b.** $-x^2 + 6x + 9$ **c.** $-4x^2 - 11x + 3$ **d.** $x^2 + 3x + 5$

Exercice n°13 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2 - 1 < 0$ **b.** $-3x^2 + x + 10 > 0$ **c.** $\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 8 \leqslant 0$ **d.** $x^2 + 3x - 5 \geqslant x + 4$

Exercice n°14

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 - 3x$$

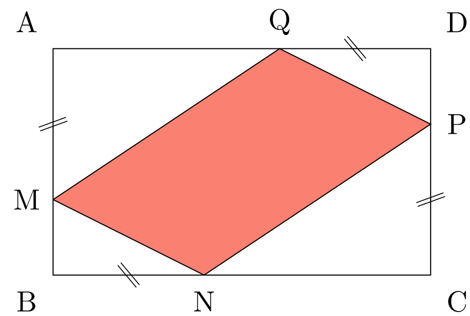
1. Résoudre $f(x) > g(x)$.
2. Que peut-on en déduire concernant la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$?

Exercice n°15 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$.

1. Donner une racine évidente de g.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $g(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
3. Etudier le signe de $g(x)$.

Exercice n°16

ABCD est un rectangle tel que AB = 3 cm et BC = 5 cm. Les points M, N, P et Q appartiennent aux côtés du rectangle et AM = BN = CP = DQ = x où x est un réel exprimé en cm. Enfin, on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de MNPQ en cm^2.



1. Préciser l'ensemble de définition de $\mathcal{A}$.
2. Montrer que $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15$.
3. Peut-on placer M de telle sorte que l'aire de MNPQ soit égale à 9 cm^2 ?
4. Peut-on placer M de telle sorte que l'aire de MNPQ soit inférieure à 9 cm^2 ?
5. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.
6. Quelle est l'aire maximale de MNPQ ? Pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?