# Correction : primitives et équations différentielles

## > Déterminer des primitives de fonctions usuelles

### Exercice n°1

**a.** $F(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - x^2 + 2x$

**b.** $F(x) = \dfrac{7}{6}x^6 - \dfrac{6}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + x$

**c.** $F(x) = \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 10x$

### Exercice n°2

**a.** $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \ln(x)$

**b.** $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \sin(x)$

**c.** $F(x) = 2e^x - \dfrac{1}{2}x$

### Exercice n°3

**a.** $F(x) = \dfrac{1}{x} - x^2 + x$

**b.** $F(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{1}{3}x^3$

**c.** $F(x) = -e^x$

## > Déterminer des primitives de fonctions composées

### Exercice n°4

**a.** On pose $u(x) = x + 3$. On a alors $u'(x) = 1$. On peut utiliser la formule $u'u$ et on trouve $F(x) = \dfrac{1}{5}(x+3)^5$.

**b.** On pose $u(x) = 2x - 3$. On a alors $u'(x) = 2$. On peut utiliser la formule $u'u$ et on trouve $F(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}(2x-3)^3$
Soit $F(x) = \dfrac{1}{6}(2x-3)^3$.

**c.** On pose $u(x) = x^3 - 2$. On a alors $u'(x) = 3x^2$. On peut utiliser la formule $u'u$ et on trouve $F(x) = \dfrac{1}{4}(x^3-2)^4$

### Exercice n°5

**a.** On pose $u(x) = 3x^2 + 2x - 3$. On a donc $u'(x) = 6x + 2$. On peut utiliser la formule $\dfrac{u'}{u}$ et on trouve $F(x) = \ln(3x^2 + 2x - 3)$.

**b.** On pose $u(x) = x^2 - 4x$. On a donc $u'(x) = 2x - 4$. On peut utiliser la formule $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et on trouve $F(x) = -\sqrt{x^2 - 4x}$.

**a.** On pose $u(x) = x^2$. On a donc $u'(x) = 2x$. On peut utiliser la formule $u'e^u$ et on trouve $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$.

## Exercice n°6

1. $$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{a(x-1)(x+1) + bx(x-1) + cc(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{ax^2 - a + bx^2 - bx + cx^2 + cx}{x(x-1)^2}$$
$$= \frac{(a+b+c)x^2 + (c-b)x - a}{x(x-1)^2}.$$

   Par identification, on arrive au système $\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ c-b &= 0 \\ -a = 1 \end{cases}$ ce qui nous donne $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$.

2. D'après la question précédente, on a $g(x) = \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$ soit $g(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$.

   Une primitive de cette fonction est donc $G(x) = -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)$.

## Exercice n°7

1. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x} = x - 2 + \frac{4}{x}$. Une primitive de cette fonction est $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4\ln(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

   Puisque $F(1) = 2$ on a alors : $\frac{1}{2} \times 1^2 - 2 \times 1 + 4\ln(1) + k = 2$

   $\Leftrightarrow -\frac{3}{2} + k = 2$

   $\Leftrightarrow k = \frac{7}{2}$.

   La primitive recherchée est donc $F : x \mapsto F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4\ln(x) + \frac{7}{2}$.

2. Posons $u(x) = x^2$. On a donc $u'(x) = 2x$. Une primitive de $g$ est donc $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

   Puisque $G(1) = 3e$ on a alors $\frac{1}{2}e^{1^2} + k = 3e$ soit $k = \frac{5}{2}e$.

   La primitive recherchée est donc $G : x \mapsto G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{5}{2}e$.

3. Posons $u(x) = 4x - 3$. On a alors $u'x) = 4$. Une primitive de la fonction $h$ est donc $H(x) = -\frac{5}{4(4x-3)} + k$.

   Puisque $H(1) = 1$ on a alors : $-\frac{5}{4(4 \times 1 - 3)} + k = 1$ soit $k = \frac{9}{4}$.

   La primitive recherchée est donc $H : x \mapsto H(x) = -\frac{5}{4(4x-3)} + \frac{9}{4}$.

4. $j(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-2x+1} = \dfrac{2x-2}{x^2-2x+1} - \dfrac{1}{x^2-2x+1} = \dfrac{2x-2}{x^2-2x+1}$.

   On pose $u(x) = x^2 - 2x + 1$ et $v(x) = x - 1$. On a donc $u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = 1$. Une primitive de cette fonction est $J(x) = \ln(x^2 - 2x + 1) + \dfrac{1}{x-1} + k$.

   Puisque $J(0) = -2$ on a alors $\ln(0^2 - 2 \times 0 + 1) + \dfrac{1}{0-1} + k = -2$ soit $k = -1$.

   La primitive recherchée est donc $J :: x \mapsto J(x) = \ln(x^2 - 2x + 1) + \dfrac{1}{x-1} - 1$

## Exercice n°8

**a.** $F(x) = \cos(3x - 1)$ **b.** $\sin(x2x^2 + x)$ **c.** $2\cos(7x)$

## > Résoudre une équation différentielle du type $y = ay + b$

## Exercice n°9

1. Les solutions sont de la forme $x \mapsto ke^{\frac{2}{3}x}$, $k \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions sont de la forme $x \mapsto ke^{-5x}$, $k \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions sont de la forme $x \mapsto ke^{6x}$, $k \in \mathbb{R}$. Puisque $y(0) = 1$ on a $ke^{6\times 0} = 1$ soit $k = 1$. La solution est donc $x \mapsto e^{6x}$.

## Exercice n°10

1. $2y' - y = 3$ revient à $y' = \dfrac{1}{2}y + \dfrac{3}{2}$. On retrouve une équation différentielle du type $y' = ay + b$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{3}{2}$.

   Une solution particulière est donc $-\dfrac{b}{a}$ soit $-\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$.

2. Les solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2}y$ sont de la forme $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

3. La forme générale des solutions de (E) sont donc $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 3$, $k \in \mathbb{R}$.

4. Puisque $f(0) = -1$ on a $ke^{\frac{1}{2}x} - 3 = -1$ soit $k - 3 = -1$ et donc $k = 2$.

   La solution recherchée est donc $x \mapsto 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$.

## Exercice n°11

**a.** Une solution particulière est $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-2}{5} = \dfrac{2}{5}$.

Les solutions de $y' = 5y$ sont de la forme $ke^{5x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Les solutions sont donc de la forme $x \mapsto ke^{5x} + \dfrac{2}{5}$, $k \in \mathbb{R}$.

**b.** $2y' = 8y - 5 \Leftrightarrow y' = 4y - \dfrac{5}{2}$. Une solution particulière est $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-\dfrac{5}{2}}{4} = \dfrac{5}{8}$.

Les solutions de $y' = 4y$ sont de la forme $x \mapsto ke^{4x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Les solutions sont donc de la forme $x \mapsto ke^{4x} + \dfrac{5}{8}$, $k \in \mathbb{R}$.

**c.** $3y' + 10 = y \Leftrightarrow y' = \dfrac{1}{3}y - \dfrac{10}{3}$. Une solution particulière est $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-\dfrac{10}{3}}{\dfrac{1}{3}} = 10$.

Les solutions de $y' = \dfrac{1}{3}y$ sont de la forme $x \mapsto ke^{\frac{1}{3}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Les solutions sont donc de la forme $x \mapsto ke^{\frac{1}{3}x} + 10$, $k \in \mathbb{R}$.

## > Résoudre une équation différentielle du type $y = ay + f$

### Exercice n°12

1. On pose $u(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = \ln(1 + 2e^x)$. On a alors $u'(x) = -2e^{-2x}$ et $v'(x) = \dfrac{2e^x}{1 + 2e^x}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= -2e^{-2x} \times \ln(1 + 2e^x) + e^{-2x} \times \frac{2e^x}{1 + 2e^x} \\ &= -2e^{-2x}\ln(1 + 2e^x) + \frac{2e^{x-2x}}{1 + 2e^x} \\ &= -2e^{-2x}\ln(1 + 2e^x) + \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x}. \end{aligned}$$

$$f'(x) + 2f(x) = -2e^{-2x}\ln(1 + 2e^x) + \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x} + 2e^{-2x}\ln(1 + 2e^x) = \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x}.$$

$f$ est bien une solution particulière de (E).

2. $y' + 2y = 0$ revient à $y' = -2y$. Les solutions de ce type d'équation différentielle sont de la forme $ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions de (E) sont donc de la forme $x \mapsto ke^{-2x} + e^{-2x}\ln(1 + 2e^x)$, $k \in \mathbb{R}$.

### Exercice n°13

1. Si $u(x) = xe^{-x}$ alors $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$.
   $u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$. Donc $u$ est bien une solution particulière de (E).

2. $y' + y = 0$ revient à $y' = -y$. Les solutions de ce type d'équation différentielle sont de la forme $x \mapsto ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions de (E) sont donc de la forme $x \mapsto ke^{-x} + xe^{-x} = (x+k)e^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.