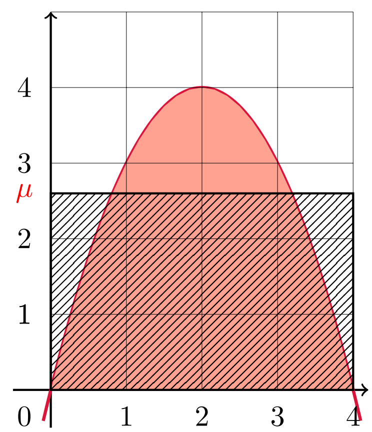
# Correction des exercices sur l'intégration (2)

## > Déterminer une valeur moyenne

### Exercice n°1

En plaçant approximativement la droite d'équation $y = \mu$ de façon à obtenir un rectangle possédant la même valeur que $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, on trouve $\mu \approx 2,6$.




### Exercice n°2

$$\mu = \frac{1}{5-2}\int_2^5 2x - 3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[x^2 - 3x\right]_2^5 = \frac{1}{3}(5^2 - 3\times 5 - (2^2 - 3\times 2)) = 4.$$

### Exercice n°3

1. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est $2\pi$-périodique. Donc la fonction $f$ est 2-périodique.
2. Une primitive de la fonction $f$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi x)$.
3. $\mu = \dfrac{1}{-1-1}\displaystyle\int_{-1}^1 \cos(\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\sin(-\pi) - \frac{1}{\pi}\sin(\pi)\right) = 0$

## Exercice n°4

$$\begin{aligned}\frac{1}{70-20}\int_{20}^{70}\frac{110(\ln(x)-2)}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{50}\times 110\times\left(\int_{20}^{70}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x-2\int_{20}^{70}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{50}\times 110\left(\left[\frac{\ln(x)^2}{x}\right]_{20}^{70}-2\left[\ln(x)\right]_{20}^{70}\right)\\ &\approx 4,5.\end{aligned}$$

La valeur moyenne de la capacité pulmonaire chez l'adulte entre 20 et 70 ans est d'environ 4,5 litres.

## > Encadrer une intégrale

## Exercice n°5

1. Pour tout réel $x \geqslant 1$, $x^2+1 \geqslant x$ donc $0 < \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{x}$.

   En multipliant par $\ln(x) \geqslant 0$ on obtient alors $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

2. On utilise la formule de dérivation du quotient.

   $G'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}\times x-(-\ln(x)-1)\times 1}{x^2} = \dfrac{\ln(x)}{x^2}.$

3. D'après la première question, $\displaystyle\int_1^e 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   D'après la question 2, $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = G(e)-G(1) = \frac{-1-1}{e}-\frac{0-1}{1} = -\frac{2}{e}+1$.

   Finalement, $\displaystyle 0 \leqslant \int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{e}-1 \approx 0,264$.

## Exercice n°6

1. Pour tout $x \in [1\,;\,3]$ :

$$\begin{aligned} &1 \leqslant x \leqslant 3\\ \Leftrightarrow\ &1 \leqslant x^2 \leqslant 9\\ \Leftrightarrow\ &2 \leqslant 1+x^2 \leqslant 10\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{1+x^2} \geqslant \frac{1}{10}\end{aligned}$$

   Par intégration, on obtient alors : $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_1^3 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_1^3 \frac{1}{10}\,\mathrm{d}x$

Or $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x\right]_1^3 = \frac{1}{2}\times 3 - \frac{1}{2}\times 1 = 1$. Et $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10}x\right]_1^3 = \frac{1}{10}\times 3 - \frac{1}{10}\times 1 = \frac{1}{5}$.

Ainsi, $\displaystyle\frac{1}{5} \leqslant \int_1^3 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 1$.

2. Pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ :

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\ & 1 \leqslant x^2+1 \leqslant \frac{5}{4} \\
\Leftrightarrow\ & 1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & 1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Par intégration, on obtient ensuite : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{d}x$.

Or $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{5}}$. D'où le résultat à démontrer.

## > Intégrer par parties

### Exercice n°7

**a.** On pose $v(x) = x$ et $u'(x) = \sin(x)$. On a donc $v'(x) = 1$ et $u(x) = -\cos(x)$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-\cos(x)\times x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)\times 1\,\mathrm{d}x \\
&= [-\cos(x)\times x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

**b.** On pose $v(x) = x^2$ et $u'(x) = \cos(x)$. On a donc $v'(x) = 2x$ et $u(x) = \sin(x)$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\sin(x)\times x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\times 2x\,\mathrm{d}x \text{ (on va utiliser l'intégrale de la question précédente)} \\
&= \left[\sin(x)\times x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0^2 \times \sin(0) - 2 \times 1$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2$$

**c.** On pose $v(x) = \ln(x)$ et $u'(x) = 1$. On a donc $v'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $u(x) = x$.

$$\int_1^{e^2} \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= [x\ln(x)]_1^{e^2} - [x]_1^{e^2}$$

$$= e^2 + 1$$

## Exercice n°8

**a.** On pose $v(x) = x + 2$ et $u'(x) = e^x$. On a donc $v'(x) = 1$ et $u(x) = e^x$.

$$\int_0^1 (x+2)e^x\,\mathrm{d}x = [(x+2)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$$

$$= [(x+2)e^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

$$= 2e - 1$$

**b.** On pose $u'(t) = e^{2t}$ et $v(t) = t - 2$. On a donc $u(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t}$ et $v'(t) = 1$.

$$\int_1^2 (t-2)e^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}e^{2t}(t-2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}e^{2t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2t}(t-2)\right]_1^2 - \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^4$$

**c.** On pose $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$. On a donc $u(x) = \dfrac{x^3}{3}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\int_1^e x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3\ln(x)}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^3\ln(x)}{3}\right]_1^e - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e$$

$$= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

## > Aire entre deux courbes

### Exercice n°8

1. Posons $d(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{(\ln(x))^2}{x} = \dfrac{\ln(x)(1-\ln(x))}{x}$. On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $1-\ln(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $d(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ pour $x \in [1\,;\,e]$.

2. $\displaystyle\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}$

$\displaystyle\int_1^e g(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\ln(x)^3\right]_1^e = \frac{1}{6}.$

D'où $\displaystyle\int_1^e f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}.$

### Exercice n°9

$$\begin{aligned}\int_{-5}^{3} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-5}^{3} x^2 - 9\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3}9x\right]_{-5}^{3} \\ &= \frac{64}{3}\end{aligned}$$

## > Etudier une suite d'intégrales

### Exercice n°10

1. $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x.$

Sur $[0\,;\,1]$, $x^n$ est positif tout comme $\ln(x+1)$. En revanche, $(x-1)$ est négatif.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc $(u_n)$ est décroissante.

$x^n \ln(x+1) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,1]$ donc $u_n \geqslant$.
Puisque $(u_n)$ est décroissante et minorée par 0 alors elle converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x+1 \leqslant 2 \Leftrightarrow \ln(1) \leqslant \ln(x+1) \leqslant \ln(2) \Leftrightarrow 0 \leqslant x^n \ln(x+1) \leqslant x^n \ln(2)$.

Ainsi, $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(2)\,\mathrm{d}x$.

Or $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(2)\,\mathrm{d}x = \ln(2)\left[\frac{1}{x+1}x^{n+1}\right] = \frac{\ln(2)}{n+1}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

## Exercice n°11

1. $$\begin{aligned} u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{e^0}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(2)$.

   Puisque $u_0 + u_1 = 1$ alors $u_0 = 1 + \ln(1+e^{-1}) - \ln(2)$.

3. Pour tout entier naturel $n$ et pour tout réel $x$, $e^{-nx} > 0$ et $1 + e^{-x} > 0$ donc $\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} > 0$. Par intégration, $u_n \geqslant 0$.

4. $$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 e^{-nx}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

5. D'après les questions précédentes, $u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} \geqslant 0$.

   D'après la question précédente, $u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n} - u_{n+1}$ donc $u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

6. Pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-e^{-n}}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $(u_n)$ converge aussi vers 0.

## Exercice n°12

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 x^0 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1.$

2. $$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
   $$= \int_0^1 x^n e^{-x}(x-1)\,\mathrm{d}x$$

   Si $x \in [0\,;\,1]$ alors $x^n e^{-x} \geqslant 0$ et $x - 1 \leqslant 0$. Donc $\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}(x-1)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ donc $I_{n+1} - I_n \leqslant$ ce qui montre que la suite $(I_n)$ est décroissante sur $\mathbb{N}$.

3. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $x^n e^{-x} \geqslant 0$. La suite $(I_n)$ est donc décroissante et minorée par 0 : elle converge.

4. Pour tout réel $x \in [0\,;\,1]$ on a $0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$.

   En particulier, $e^{-x} \leqslant 1$ donc $x^n e^{-x} \leqslant x^n$ et donc $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.

5. D'après les questions précédentes, $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.

   $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

   D'après le théorème des gendarmes, la suite $(I_n)$ converge également vers 0.