

Correction des exercices sur les nombres complexes (1)

> Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes

Exercice n°1

- a. $(3+i)(5-i) = 15 - 3i + 5i - i^2 = 15 - 3i + 5i + 1 = 16 + 2i$
- b. $(7+2i)(10-i) = 70 - 7i + 20i - 2i^2 = 70 + 13i + 2 = 72 + 13i$
- c. $(-7+2i)^2 = (-7)^2 + 2 \times (-7) \times 2i + (2i)^2 = 49 - 28i - 4 = 45 - 28i$

Exercice n°2

- a. $\frac{2}{2-i} = \frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+2i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$
- b. $\frac{1+i}{8-4i} = \frac{(1+i)(8+4i)}{(8-4i)(8+4i)} = \frac{8+4i+8i+4i^2}{64+16} = \frac{4+12i}{80} = \frac{1}{20} + \frac{3}{20}i$
- c. $\frac{3-4i}{1+i} = \frac{(3-4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

Exercice n°3

- a. $\overline{(3+i)(-13-2i)} = (3-i)(-13+2i) = -39 + 6i + 13i + 2 = -37 + 19i$
- b. $\overline{i(1-i)^3} = -i(1+i)^3 = -i(1+3i-3-i) = 2i + 2$
- c. $\overline{\left(\frac{2-3i}{8+5i}\right)} = \frac{2+3i}{8-5i} = \frac{(2+3i)(8+5i)}{(8-5i)(8+5i)} = \frac{16+10i+24i-15}{64+25} = \frac{1}{89} + \frac{34}{89}i$

> Résoudre une équation du type $az = b$

Exercice n°4

- a. $iz = 1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{1+2i}{i}$
- $$\Leftrightarrow z = \frac{(1+2i) \times (-i)}{i \times (-i)}$$
- $$\Leftrightarrow z = \frac{-i - 2 \times (-1)}{1}$$
- $$\Leftrightarrow z = 2 - i$$

$$\begin{aligned}\text{b. } (1+i)z = 5 &\Leftrightarrow z = \frac{5}{1+i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{5(1-i)}{(1-i)(1+i)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{5-5i}{2} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c. } 4z = i - 2 &\Leftrightarrow z = \frac{i-2}{4} \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\end{aligned}$$

Exercice n°5

$$\begin{aligned}\text{a. } 3z + 2iz = 3 - i &\Leftrightarrow (3+2i)z = 3 - i \\ &\Leftrightarrow z = \frac{3-i}{3+2i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{(3-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{9-9i-2}{13} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{7}{13} - \frac{9}{13}i \\ \text{b. } (5-i)(z+3) = i &\Leftrightarrow (5-i)z + (5-i) \times 3 = i \\ &\Leftrightarrow z(5-i) = i - 15 + 3i \\ &\Leftrightarrow z(5-i) = -15 + 4i \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-15+4i}{5-i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{(-15+4i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-75-15i+20i+4i^2}{26} \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{79}{26} + \frac{5}{26}i\end{aligned}$$

> Résoudre une équation faisant intervenir z et $\bar{z}$

Exercice n°6 On posera $z = a + ib$.

a. $z + \bar{z} = 6 \Leftrightarrow a + ib + a - ib = 6$

$$\Leftrightarrow 2a + 0bi = 6$$

$$\Leftrightarrow a + 0bi = 3$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{3 + ib; b \in \mathbb{R}\}$.

b. $z + \bar{z} = i \Leftrightarrow a + ib + a - ib = i$

$$\Leftrightarrow 2a + 0i = 0 + i$$

Cette équation n'admet pas de solution.

c. $z = 2\bar{z} = 8 + i \Leftrightarrow a + ib + 2(a - ib) = 8 + i$

$$\Leftrightarrow 3a - ib = 8 + i$$

$$\Leftrightarrow 3a = 8 \text{ et } -b = 1$$

Cette équation admet une unique solution $z = \frac{8}{3} - i$

Exercice n°7 On posera $z = a + ib$.

a. $i\bar{z} + 2(z - 5) = 0 \Leftrightarrow i(a - ib) + 2a + 2ib - 10 = 0$

$$\Leftrightarrow ia - i^2 + 2a + 2ib = 0$$

$$\Leftrightarrow (b + 2a - 10) + i(a + 2b) = 0$$

Il faut donc que $2a + b - 10 = 0$ et que $a + 2b = 0$. On trouve alors $a = \frac{20}{3}$ et $b = \frac{-10}{3}$.

L'unique solution de l'équation est donc le nombre complexe $z = \frac{20}{3} - \frac{10}{3}i$.

b. $3 + iz + 2i = z \Leftrightarrow iz - z = -3 - 2i$

$$\Leftrightarrow z(-1 + i) = -3 - 2i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-3 - 2i}{-1 + i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(-3 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 + 5i}{2}$$

L'unique solution de cette équation est $z = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$.

$$\text{c. } (3+i)z - 3(5z-2) = 0 \Leftrightarrow (3+i)z - 15z + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow z(-12+i) = -6$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-6}{-12+i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{6(12+i)}{(12-i)(12+i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{72+6i}{145}$$

L'unique solution de cette équation est $z = \frac{72}{145} + \frac{6}{145}i$.