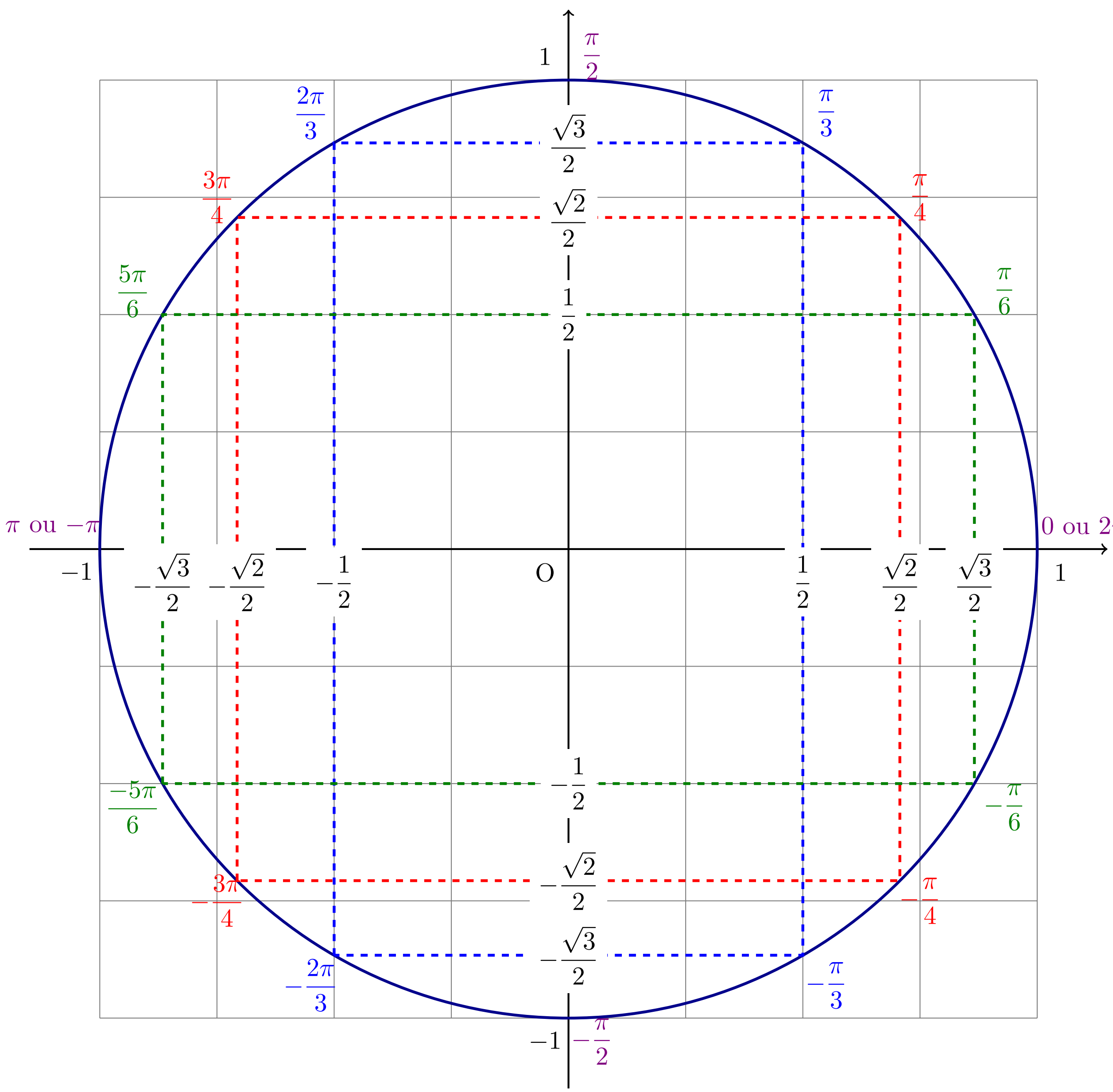
Fonctions trigonométriques

1 Résolution d'équations trigonométriques

Propriétés : Rappel des valeurs remarquables

On rappelle ci-dessous le cercle trigonométrique étudié en classe de première. Il permet de visualiser et de retenir les valeurs remarquables. Le cosinus d'un angle orienté se lit sur l'axe des abscisses, le sinus sur l'axe des ordonnées.



Exemple

On souhaite résoudre l'équation $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$.

En regardant sur le cercle trigonométrique, on voit que $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et que $\sin\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\sin(x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{6} + k \times 2\pi$ ou $x = \dfrac{-5\pi}{6} + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2 Les fonctions trigonométriques

Définitions : les fonctions trigonométriques

Soit x un nombre réel.
On appelle fonction **cosinus** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à x associe $\cos(x)$.
On appelle fonction **sinus** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à x associe $\sin(x)$.

Propriétés : parité

- La fonction cosinus est paire : pour tout x réel on a $\cos(-x) = \cos(x)$. Sa courbe représentative admet donc une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction sinus est impaire : pour tout x réel on a $\sin(-x) = -\sin(x)$. Sa courbe représentative admet donc une symétrie par rapport à l'origine du repère.

Définition : fonction périodique

Soit t un nombre réel. On dit qu'une fonction f est **périodique** de période t si pour tout réel x $f(x+t) = f(x)$.
Dans ce cas, on dit que f est $t-$périodique.

Propriétés : périodicité des fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus sont $2\pi-$périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

Remarque

C'est pour cette raison que l'on retrouve les mêmes « morceaux » de courbes sur chaque intervalle de longueur 2π.

Propriétés : dérivées des fonctions trigonométriques

Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad\qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

Propriétés : variations des fonctions trigonométriques

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est décroissante sur $[0\,;\,\pi]$ et La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.

x	0		π
$-\sin(x)$		$-$	
$\cos$	1	$\searrow$	-1

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Courbes représentatives des fonctions trigonométriques

A l'aide des précédents tableaux de variations et du fait de la périodicité et de la parité des fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$, on donne ci-dessous les courbes représentatives de ces deux fonctions :