Tableau de signes

Soit f un polynôme du second degré à valeurs dans $\mathbb{R}$ défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Pour établir le tableau de signe d'un polynôme f du second degré :

- **Étape n°1** : On factorise $f(x)$.
- **Étape n°2** : On trouve les éventuelles racines de f.
- **Étape n°3** : On établit le tableau de signe du polynôme.

Propriété
- Si f n'a pas de racine, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.
- Si f n'a qu'une seule racine, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.
- Si f admet deux racines distinctes, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ sauf entre les racines.

Exercice n°1

Établir le tableau de signe des polynômes suivants :

a. $2x^2 + 5x - 7$ **b.** $3x^2 + 6x - 9$ **c.** $-x^2 - 4x - 4$

d. $-10x^2 - 6x + 4$ **e.** $3x^2 + 6x + 3$ **f.** $-2x^2 + 4x - 10$

Correction exercice n°1

a. $2x^2 + 5x - 7$

$$= 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x\right) - 7$$

$$= 2\left(x^2 + 2 \times \frac{5}{4} \times x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right) - 7$$

$$= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 7$$

$$= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{81}{8}$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{81}{16}\right]$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2\right]$$

$$= 2\left(x + \frac{5}{4} - \frac{9}{4}\right)\left(x + \frac{5}{4} + \frac{9}{4}\right)$$

$$= 2(x - 1)\left(x + \frac{7}{2}\right)$$

Les deux racines sont donc $x = 1$ et $x = -\frac{7}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. $3x^2+6x-9$

$= 3(x^2+2x)-9$

$= 3(x^2+2\times 1\times x+1^2-1^2)-9$

$= 3(x+1)^2-3\times 1^2-9$

$= 3(x+1)^2-12$

$= 3[(x+1)^2-4]$

$= 3[(x+1)^2-2^2]$

$= 3(x+1-2)(x+1+2)$

$= 3(x-1)(x+3)$

Les deux racines sont donc $x=1$ et $x=-3$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c. $-x^2-4x-4=-(x^2+4x+4)=-(x+2)^2$

Le polynôme n'admet qu'une seule racine : $x=-2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

d. $-10x^2-6x+4$

$= -10\left(x^2+\dfrac{6}{10}x\right)+4$

$= -10\left(x^2+\dfrac{3}{5}x\right)+4$

$= -10\left(x^2+2\times\dfrac{3}{10}\times x+\left(\dfrac{3}{10}\right)^2-\left(\dfrac{3}{10}\right)^2\right)+4$

$= -10\left(x+\dfrac{3}{10}\right)^2+3\times\left(\dfrac{3}{10}\right)^2+4$

$= -10\left(x+\dfrac{3}{10}\right)^2+\dfrac{49}{10}$

$= -10\left[\left(x+\dfrac{3}{10}\right)^2-\dfrac{49}{100}\right]$

$= -10\left[\left(x+\dfrac{3}{10}\right)^2-\left(\dfrac{7}{10}\right)^2\right]$

$= -10\left(x+\dfrac{3}{10}-\dfrac{7}{10}\right)\left(x+\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{10}\right)$

$= -10\left(x-\dfrac{2}{5}\right)(x+1)$

Les deux racines sont donc $x=\dfrac{2}{5}$ et $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$\dfrac{2}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e. $3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2$

Le polynôme n'admet qu'une seule racine : $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

f. $-2x^2 + 4x - 10$

$= -2(x^2 - 2x) - 10$

$= -2(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 - 1^2) - 10$

$= -2(x - 1)^2 + 2 \times 1^2 - 10$

$= -2(x - 1)^2 - 8$

$= -2[(x - 1)^2 + 4]$

$= -2[(x - 1)^2 + 2^2]$

On ne peux pas factoriser davantage. À cause du « + », on ne peut pas utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
En réalité, l'équation $-2x^2 + 4x - 10 = 0$ n'admet pas de solution donc le polynôme n'admet aucune racine réelle.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-$