Correction des exercices sur les polynômes

> Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels

Exercice n°1

a. $z^2 = -9 \Leftrightarrow z^2 = (3i)^2 \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z = -3i$.

b. $\Delta = -144$. Puisque $\Delta < 0$ l'équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-16 - i\sqrt{|-144|}}{2 \times 4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-16 + i\sqrt{|-144|}}{2 \times 4}$$

ce qui donne

$$z_1 = -2 - \frac{3}{2}i \quad \text{et} \quad z_2 = -2 + \frac{3}{2}i$$

c. $\dfrac{3z-2}{z+1} = z \Leftrightarrow 3z - 2 = z(z+1) \Leftrightarrow -z^2 + 2z - 2 = 0$.

$\Delta = -4$. Puisque $\Delta < 0$ l'équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{|-4|}}{2 \times (-1)} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 + i\sqrt{|-4|}}{2 \times (-1)}$$

ce qui donne :

$$z_1 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 + i$$

Exercice n°2

a. $z^2 - 5z + 6 = 0$. $\Delta = 1$. Puisque $\Delta > 0$ l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

ce qui donne :

$$z_1 = 2 \quad \text{et} \quad z_2 = 3$$

b. $4z^2 - 4z + 17 = 0$. $\Delta = -256$. Puisque $\Delta < 0$ l'équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-4) - i\sqrt{|-256|}}{2 \times 4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(-4) + i\sqrt{|-256|}}{2 \times 4}$$

ce qui donne :

$$z_1 = \frac{1}{2} - 2i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{2} + 2i$$

c. $-z^2+2z-5=0$. $\Delta=-16$. Puisque $\Delta<0$ l'équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{-2-i\sqrt{|-16|}}{2\times(-1)} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-2+i\sqrt{|-16|}}{2\times(-1)}$$

ce qui donne :

$$z_1=1+2i \quad \text{et} \quad z_2=1-2i$$

> Résoudre une équation polynomiale de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue

Exercice n°3

1. $(-1-i)^3+i(-1-i)^2-i(-1-i)+1+i=(-1)^3+3\times(-1)^2\times(-i)+3\times(-1)\times(-i)^2+(-i)^3+i((-1)^2+2\times(-1)\times(-i)+(-i)^2)+i+i^2+1+i=0$.

   $-1-i$ est donc une racine de P.

2. $(z+1+i)(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz+z^2+az+b+iz^2+aiz+ib=z^3+(a+1+i)z^2+(b+a+ai)z+(1+i)b$.
   Par identification, on doit avoir
   $$\begin{cases} a+1+i=i \\ b+a+ai=-i \\ (1+i)b=1+i \end{cases}$$
   $\Leftrightarrow$
   $$\begin{cases} a=-1 \\ b+a+ai=-i \\ b=1 \end{cases}$$
   Ainsi, P peut s'écrire sous la forme $P(z)=(z+1+i)(z^2-z+1)$.

3. $P(z)=0 \Leftrightarrow (z+1+i)(z^2-z+1)=0$
   Une première solution a été trouvée dans la première question : $z=-1-i$.

   Résolvons $z^2-z+1=0$.
   $\Delta=-3$. Puisque $\Delta<0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
   $$z_1=\frac{-(-1)-i\sqrt{|-3|}}{2\times1} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-(-1)+i\sqrt{|-3|}}{2\times1}$$
   ce qui nous donne :
   $$z_1=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
   Les solutions de l'équations $P(z)=0$ sont donc $z=-1-i$, $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice n°4

1. $1^3 + 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0$.
   $z = 1$ est donc bien une solution de (E).

2. Puisque 1 est solution de (E), il existe a, il existe deux réels a et b tels que $z^3 + z^2 - 3z + 1 = (z-1)(z^2 + az + b)$.
   Or $(z-1)(z^2 + az + b) = z^3 + z^2(a-1) + z(b-a) - b$.
   Par identification, on trouve $\Leftrightarrow$
   $$\begin{cases} a - 1 = 1 \\ b - a = -3 \\ -b = 1 \end{cases}$$
   ce qui donne $a = 2$ et $b = -1$.
   L'équation (E) revient donc à $(z-1)(z^2 + 2z - 1) = 0$.

   Résolvons $z^2 + 2z - 1 = 0$.
   $\Delta = 8 > 0$. L'équation admet donc deux solutions réelles distinctes :
   $$z_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2 \times 1}$$
   ce qui nous donne :
   $$z_1 = -1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = -1 + \sqrt{2}$$
   Les solutions de l'équation (E) sont donc $z = 1$, $z = -1 - \sqrt{2}$ et $z = -1 + \sqrt{2}$.

Exercice n°5

1. $2^3 + 4 \times 2^2 + 2 \times 2 - 28 = 0$.
   2 est bien une racine du polynôme $z^3 + 4z^2 + 2z - 28$.

2. $(z-2)(z^2 + az + b) = z^3 + z^2(a-2) + z(b-2a) - 2b$
   Par identification, on obtient :
   $$\begin{cases} a - 2 = 4 \\ b - 2a = 2 \\ -2b = 28 \end{cases}$$
   ce qui nous donne $a = 6$ et $b = 14$.
   L'équation (E) peut donc s'écrire $(z-2)(z^2 + 6z + 14) = 0$.

3. Résolvons $z^2 + 6z + 14 = 0$.
   $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 14 = -20 < 0$. L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :
   $$z_1 = \frac{-6 - i\sqrt{|-20|}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-6 + i\sqrt{|-20|}}{2 \times 1}$$
   ce qui nous donne :
   $$z_1 = -3 - i\sqrt{5} \quad \text{et} \quad z_2 = -3 + i\sqrt{5}$$
   Les solutions de (E) sont donc $z = 2$, $z = -3 - i\sqrt{5}$ et $z = -3 + i\sqrt{5}$.

> Factoriser un polynôme dont une racine est connue

Exercice n°6

1. $P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 4 \times (-1) + 4 = 0$
   -1 est bien une racine de P.

2. Puisque -1 est une racine de P, il existe trois réels a, b et c tels que $P(z) = (z+1)(az^2 + bz + c)$.
   Or $(z+1)(az^2 + bz + c) = az^3 + z^2(a+b) + (c+b)z + c$.
   Par identification, on obtient :
   $$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ c + b = 4 \\ c = 4 \end{cases}$$
   ce qui nous donne $a = 1$, $b = 0$ et $c = 4$.
   Ainsi, $P(z) = (z+2)(z^2+4)$.
   Or $z^2 + 4 = (z-2i)(z+2i)$. Finalement, $P(z) = (z+1)(z-2i)(z+2i)$.

Exercice n°7

1. $z^4 - 1 = (z^2)^2 - 1^2 = (z^2-1)(z^2+1)$
   Or $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$ et $(z^2+1) = (z+i)(z-i)$.
   Finalement, $z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$.

2. D'après la question précédente, les racines de P sont 1, -1, i et $-i$.
   Ces nombres correspondent aux solutions de l'équation $P(z) = 0$, autrement dit $z^4 - 1 = 0$.

Exercice n°8

1. $1^4 + 2 \times 1^2 - 8 \times 1 + 5 = 0$.
   1 est bien une racine de P.

2. $(z-1)^2(z^2+2z+5) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 - 2z^3 - 4z^2 - 10z + z^2 + 2z + 5 = z^4 + 2z^2 - 8z + 5 = P(z)$.

3. Résolvons l'équation $z^2 + 2z + 5 = 0$.
   $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$. Cette équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :
   $$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{|-16|}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 + i\sqrt{|-16|}}{2 \times 1}$$
   ce qui nous donne :
   $$z_1 = -1 - 2i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 + 2i$$
   Ainsi, $P(z) = (z-1)^2(z+1+2i)(z+1-2i)$.