

Les matrices

1 Notion de matrice

Définitions

Soient n et m deux entiers naturels non nul.

On appelle **matrice** de taille $m \times n$ un tableau de nombres réels formé de m lignes et de n colonnes. On la représente sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les a_{ij} sont des nombres réels appelés les **coefficients** de la matrice.

Le coefficient a_{ij} est le nombre réel situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j .

Exemples

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \sqrt{2} & 42 \\ -0,2 & 6,8 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 3×2 (3 lignes et 2 colonnes).

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3 (2 lignes et 3 colonnes).

Définition : matrice ligne

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle **matrice ligne** une matrice de taille $1 \times n$.

Exemple

La matrice $C = (2 \quad -1 \quad 4)$ est une matrice ligne. Elle représente les coordonnées d'un point de l'espace.

Définition : matrice colonne

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle **matrice colonne** une matrice de taille $n \times 1$.

Exemple

La matrice $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

Définition : matrice carrée

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle **matrice carrée** une matrice de taille $n \times n$, qui a donc le même nombre de colonnes et de lignes.

On parle aussi de matrice carrée d'ordre n .

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

2 Opérations sur les matrices

Définition : somme de matrice

Soient A et B deux matrices de même taille.

La **somme de A et B** est la matrice, notée $A + B$, dont le coefficient d'indice ij est la somme de a_{ij} et de b_{ij} .

Exemple

On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+2 & 0+3 \\ 4+1 & 3+3 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriétés

Soient A , B et C trois matrices de même taille.

- La somme de deux matrices est commutative : $A + B = B + A$.
- La somme de deux matrices est associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Définition : produit d'une matrice par un réel

Soit A une matrice et soit λ un nombre réel.

La **produit de A par λ** est la matrice notée λA dont le coefficient d'indice ij est le nombre $\lambda \times a_{ij}$.

Exemple

En reprenant l'exemple précédent : $-3A = \begin{pmatrix} -3 \times 1 & -3 \times 2 & -3 \times 0 \\ -3 \times 4 & -3 \times 3 & -3 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -12 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition : produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

Soit A une matrice carrée d'ordre n et B une matrice colonne à n lignes telles que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le **produit de la matrice A par la colonne B** est la matrice colonne à n lignes telle que :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b_2 + \dots + a_{1n} \times b_n \\ a_{21} \times b_1 + a_{22} \times b_2 + \dots + a_{2n} \times b_n \\ \dots \\ a_{n1} \times b_1 + a_{n2} \times b_2 + \dots + a_{nn} \times b_n \end{pmatrix}$$

Exemple

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 \times 2 + 3 \times 5 \\ -2 \times 2 + 4 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Définition : produit de deux matrices

Soit A une matrice de taille $n \times p$ et soit B une matrice de taille $p \times q$.

Le **produit des matrices A et B** est la matrice C de taille $n \times q$ telle que le coefficient $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 5 \\ 4 \times 5 + 3 \times 2 + (-1) \times 3 & 4 \times 1 + 3 \times 3 + (-1) \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}$$

Propriétés

- Le produit matriciel est associatif : $A(BC) = (AB)C = ABC$
- Le produit matriciel est distributif par rapport à l'addition : $A(B+C) = AB + AC$
- Le produit matriciel n'est pas commutatif : $AB \neq BA$.

3 Inverse et puissance

Définition

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle la **matrice unité** d'ordre n la matrice carrée notée I_n telle que :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit de la matrice d'ordre n dont les coefficients sont nuls sauf sur la diagonale, où ils sont égaux à 1.

Propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On a :

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

Définitions

Soit n un entier naturel non nul.

Une matrice carrée A d'ordre n est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = B \times A = I_n$.

La matrice B est alors appelée **matrice inverse** de A et est notée A^{-1} .

Remarque

Toutes les matrices n'admettent pas nécessairement d'inverse.

Définition

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des nombres réels.

Le nombre $ad - bc$ est appelé le **déterminant** de la matrice A . On note alors :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemple

Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est $\det(A) = 4 \times 1 - 3 \times 2 = -2$.

Propriété

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des nombres réels. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Définition

Soit n un entier naturel non nul. On considère une matrice carrée A .
On appelle **puissance n -ième de A** la matrice notée $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}}$.

Exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriété

Soit D une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf sur sa diagonale. Soit n un entier naturel non nul.
La matrice D^n est la matrice dont tous ses coefficients sont nuls sauf sur la diagonale où ils sont égaux aux coefficients de D à la puissance n .

Exemple

$$\text{Soit } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$D^6 = \begin{pmatrix} 2^6 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^6 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

Exemple : avec le numérique

Il est possible d'effectuer des calculs de puissances de matrice à l'aide de la calculatrice.

$$\text{On souhaite calculer } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}^2.$$

CASIO

Menu RUN.MAT puis choisir MAT à l'aide de la touche F1.

On rentre les coefficients de la matrice A .

On clique sur la touche QUIT puis sur la touche Mat et on saisit le calcul Mat A^2 .

Exemple : avec le numérique (suite et fin)**Texas Instrument**

On rentre dans le mode MATRIX puis EDIT.

On rentre les dimensions de la matrice puis on donne ses coefficients.

On choisit QUIT puis à nouveau MATRIX.

On sélectionne la matrice A et on complète la formule pour obtenir $[A^2]$.