

Géométrie repérée : approfondissement

Déterminer l'ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses

Pour connaître cet ensemble de points, on utilise le projeté orthogonal de ce point sur l'axe des abscisses.

Exercice Déterminer l'ensemble des points équidistants de $A(3; 6)$ et de l'axe des abscisses.

Correction

Soit $M(x; y)$ un point du plan et soit $H(x; 0)$ le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
 M est équidistant de l'axe des abscisses et de A si et seulement si $AH = HM$.

On a $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HM} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } AH = HM &\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{0^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-6)^2 = y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = y^2 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4} \end{aligned}$$

L'ensemble des points équidistants de $A(3; 6)$ et de l'axe des abscisses sont les points dont les coordonnées vérifient l'équation $y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$, qui est une parabole.