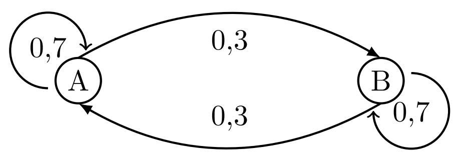
Correction des exercices sur les graphes et matrices

> Modéliser à l'aide d'un graphe, d'une matrice

Exercice n°1

1. On obtient le graphe probabiliste ci-dessous où A désigne Abu-Dhabi et B désigne Bangkok.

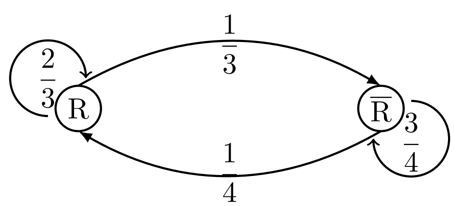


2. La matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

   D'après l'énoncé, la répartition initiale est donnée par la matrice ligne $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Puis $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times M^2 = \begin{pmatrix} 0,58 & 0,42 \end{pmatrix}$.
   La probabilité que Jean-Kevin soit à Abu Dhabi deux ans après est donc de 0,58.

Exercice n°2

1. En notant R il réussi son pénalty et $\overline{\text{R}}$ il le rate, on obtient le graphe suivant :



2. La matrice de transition associée est alors $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Exercice n°3

1. On peut traduire cette situation par une chaîne de Markov à 3 états dont la matrice de transition est la suivante : $M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,17 & 0,8 & 0,03 \end{pmatrix}$. D'après l'énoncé, la distribution initiale est $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On cherche à déterminer P_3. Or, pour tout entier naturel n, on a $P_n = P_0 \times M^n$.
   En particulier, $P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0,26371 & 0,65 & 0,08629 \end{pmatrix}$.

   La probabilité que la ruche soit de nouveau en train d'essaimer trois ans plus tard est de 0,26371.

2. La matrice M ne contient aucun 0, donc la suite (P_n) des distributions converge vers la distribution invariante de cette chaîne de Markov. Notons la $P = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$. On a $P = PM$ ce qui revient au système :

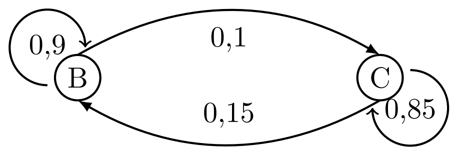
$$\left\{\begin{array}{rcl} 0,1a + 0,9b + 0,17c & = & a \\ 00,8a + 0,05b + 0,8c & = & b \\ 0,1a + 0,05b + 0,03c & = & c \end{array}\right.$$

A l'aide de ce système et puisque $a + b + c = 1$ on trouve $P \approx \begin{pmatrix} 0,47076 & 0,45714 & 0,07210 \end{pmatrix}$.

Si on observe l'essaim sur une longue période, il produira du miel $45,71\%$ du temps.

Exercice n°4

1. (a) On obtient le graphe suivant :



(b) On a $P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

La matrice de transition associée est $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

(c) $P_2 = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,825 & 0,0,175 \\ 0,2625 & 0,7375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$.

En 2015, la probabilité que le client choisi soit un « consommateur bio » est de 0,375.

> Les chaînes de Markov

Exercice n°5

1. On a $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,4b_n + 0,5c_n$
$b_{n+1} = 0,4a_n + 0,3b_n + 0,3c_n$
$c_{n+1} = 0,5a_n + 0,3b_n + 0,2c_n$

2. Prenons $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$.

$$U_n \times A = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

3. Prenons $B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$.

$$B \times V_n = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1a_n + 0,4b_n + 0,5c_n \\ 0,4a_n + 0,3b_n + 0,3c_n \\ 0,5a_n + 0,3b_n + 0,2c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1}$$

Exercice n°6

1. D'après l'énoncé, on a $a_0 = 20$ et $b_0 = 50$. On a ensuite :
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,8a_n + 0,6b_n \\ b_{n+1} = 0,2a_n + 0,4b_n \end{cases}$$
On a ainsi $a_1 = 0,8 \times 20 + 0,6 \times 50 = 46$ et $b_1 = 0,2 \times 20 + 0,4 \times 50 = 24$
Ensuite, on a $a_2 = 0,8 \times 46 + 0,6 \times 24 = 51,2$ et $b_2 = 0,2 \times 46 + 0,4 \times 24 = 18,8$
Enfin, on a $a_3 = 0,8 \times 51,2 + 0,6 \times 18,8 = 52,24$ et $b_3 = 0,2 \times 51,2 + 0,4 \times 18,8 = 17,76$.

2. A l'aide de la calculatrice, on trouve : $\begin{pmatrix} 20 & 50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 20 & 50 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,752 & 0,248 \\ 0,744 & 0,256 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 52,24 & 17,76 \end{pmatrix}$.

Exercice n°7

1. On a la matrice de transition $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$.

2. (a) La matrice π associée à la distribution invariante est telle que $\pi \times A = \pi$.

   Ce qui est équivalent à $\pi \times A - \pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \pi(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \pi \left[\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \pi \times \begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \pi \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) En notant L_1 et L_3 respectivement la première ligne et la troisième ligne du système on remarque que $-L_1 - L_3 = -(-0,7x + 0,2y + 0,6z) - (0,6x + 0,4y - 0,8z) = 0$
   ce qui revient à $0,1x - 0,6y + 0,2z = 0$.
   Ainsi, la troisième ligne du second système est obtenue par combinaison linéaire des lignes du premier système : les deux systèmes sont donc équivalents.

   (c) Ce système étant équivalent à un système de deux équations à trois inconnues, son ensemble de solution est soit vide soit possède une infinité de solution.

3. (a) On a $C \times \pi = \begin{pmatrix} -0,7x + 0,2y + 0,6z & 0,1x - 0,6y + 0,2z & x + y + z \end{pmatrix}$.

   D'après la question 2.a, on a $-0,7x + 0,2y + 0,6z = 0$; $0,1x - 0,6y + 0,2z = 0$.
   Puisque x, y et z représentent la probabilité des trois états de l'espace des états de la distribution stable, on a $x + y + z = 1$.

(b) $C \times \begin{pmatrix} -0,8 & 0,1 & 0,7 \\ 0,4 & -1,3 & 0,9 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & 1 \\ 0,2 & -0,6 & 1 \\ 0,6 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,8 & 0,1 & 0,7 \\ 0,4 & -1,3 & 0,9 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = I_3$.

(c) π vérifie la relation $\pi \times C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ce qui revient à $\pi \times C \times C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times C^{-1}$

ce qui revient à $\pi \times I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & 1 \\ 0,2 & -0,6 & 1 \\ 0,6 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$

$\pi = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$

> Utiliser le calcul matriciel

Exercice n°8

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Puis $A \times X_n + B = \begin{pmatrix} x_n + y_n + 1 \\ -2x_n + 4y_n + 3 \end{pmatrix}$.

2. (a) $I_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de cette matrice est $0 \times (-3) - 2 \times (-1) = 2$. Ce déterminant est non nul donc la matrice $I_2 - A$ est inversible.

On a $(I_2 - A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(I_2 - A)} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Soit X telle que $X = AX + B$

$\Leftrightarrow \quad X - AX = B$

$\Leftrightarrow \quad (I_2 - A)X = B$

$\Leftrightarrow \quad (I_2 - A)^{-1} \times (I_2 - A)X = (I_2 - A)^{-1}B$

$\Leftrightarrow \quad I_2X = (I_2 - A)^{-1}B$

$\Leftrightarrow \quad X = (I_2 - A)^{-1}B$

$\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Par passage à la limite, si la suite de matrice (X_{n+1}) converge et vérifie $X_{n+1} = AX_n + B$ alors elle converge vers la matrice X telle que $AX + B = X$.

Ainsi, si la suite (X_n) converge alors elle tend vers la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = -1$.

3. Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation

Pour $n = 0$, $A^0 \times V_0 = I_2 \times V_0 = V_0$. La proposition est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n supérieur ou égal à 0, on ait $V_n = A^n \times V_0$.

$V_{n+1} = X_{n+1} - X = AX_n + B - X = AX_n + B - (AX + B) = AX_n - AX = A(X_n - X) = AV_n = A(A^n \times V_0) = A^{n+1}V_0$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

4. (a) $\det(P) = 1 \times (-2) - 1 \times (-1) = -1$.
Le déterminant est non nul, donc P est inversible et on a :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) $$\begin{aligned} P^{-1} \times A \times P &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \times P \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \times P \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, la puissance n-ième de la matrice diagonale D est $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

(c) Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation

Pour $n = 0$, on a $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$
Et $A^0 = I_2$. La proposition est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n supérieur ou égal à 0, on ait $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} \\ &= PDI_2D^nP^{-1} \end{aligned}$$

$= PD^{n+1}P^{-1}$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & -3^n \\ 2^n & -2 \times 3^n \end{pmatrix} \times P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & -3^n \\ 2^n & -2 \times 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2 \times 3^n & -2^n + 2 \times 3^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5. On a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et donc $V_0 = X_0 - X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Puis $V_n = A^n \times V_0 = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2 \times 3^n & -2^n + 2 \times 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \times 3^n \\ -2^n + 4 \times 3^n \end{pmatrix}$

   Par définition des suites, on obtient $V_n = X_n - X$ donc $X_n = V_n + X = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \times 3^n \\ -2^n + 4 \times 3^n - 1 \end{pmatrix}$.

   Donc $x_n = -2^n + 2 \times 3^n = 3^n \left(2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ et $y_n = -2^n + 4 \times 3^n - 1 = 3^n \left(4 - \frac{2^n}{3^n} - \frac{1}{3^n}\right)$.

   Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = +\infty$.

Exercice n°9

1. $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \quad A \times B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ La solution du système est donc $x = 1$, $y = 2$ et $z = 3$.

Exercice n°10

1. (a) $a_1 = 0,7 \times 300 + 0,2 \times 300 + 60 = 330$ et $b_1 = 0,1 \times 300 + 0,6 \times 300 + 70 = 280$.

   (b) $$M \times U_n + P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0n2b_n \\ 0,1a_n + 0,6b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

2. (a) $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) D'après la question précédente, la matrice $(I - M)$ est inversible est sa matrice inverse est $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (c) Soit U la matrice telle que $U = MU + P$.

   $\Leftrightarrow \quad U - MU = P$

   $\Leftrightarrow \quad I_2U - MU = P$

   $\Leftrightarrow \quad (I_2 - M)U = P$

   $\Leftrightarrow \quad (I_2 - M)^{-1}(I_2 - M)U = (I_2 - M)^{-1}P$

   $\Leftrightarrow \quad U = (I_2 - M)P$

   $\Leftrightarrow \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \quad U = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

3. (a) $$V_{n+1} = U_{n+1} - U$$
   $$= MU_n + P - U$$
   $$= MU_n + P - (MU + P)$$
   $$= MU_n - MU$$
   $$= M(U_n - U)$$
   $$= MV_n$$

   (b) Montrons ce résultat par récurrence.

   Initialisation

   $M^0 \times V_0 = I \times V_0 = V_0$. La proposition est donc vraie pour $n = 0$.

   Hérédité

   Supposons que pour un entier naturel n supérieur ou égal à 0, on ait $V_n = M^nV_0$.

$V_{n+1} = MV^n = M(M^nV_0) = M^{n+1}V_0$. La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

4. (a) Puisque $V_n = U_n - U$ alors $U_n = V_n + U = \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\dfrac{50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$

   On a donc $a_n = -\dfrac{100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n + 380$.

   On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 380$.

   (b) A long terme, l'opérateur A aura 380 milliers d'abonnés.