

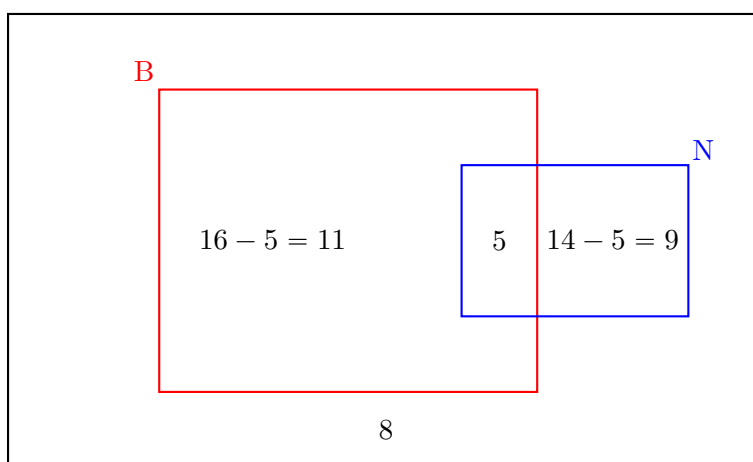
Correction des exercices sur le dénombrement

> Utiliser une représentation adaptée

Exercice n°1

On note B l'ensemble des personnes aimant le chocolat blanc et N l'ensemble des personnes aimant le chocolat noir.
On a $\text{Card}(B) = 16$, $\text{Card}(N) = 14$, $\text{Card}(B \cap N) = 5$ et $\text{Card}(\overline{B} \cap \overline{N}) = 8$.

On va s'aider d'un diagramme.



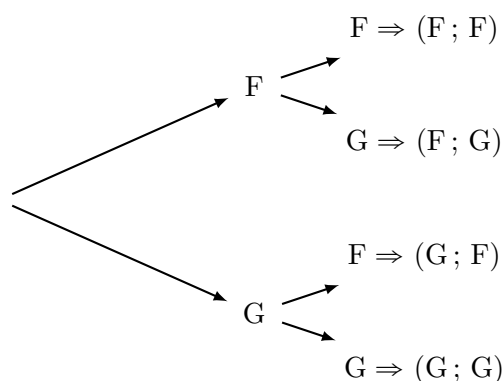
On connaît maintenant le cardinal de chacun des ensembles.

Puis $11 + 9 + 5 + 8 = 33$.

33 personnes ont donc été interrogées.

Exercice n°2

1. On va s'aider d'un arbre :

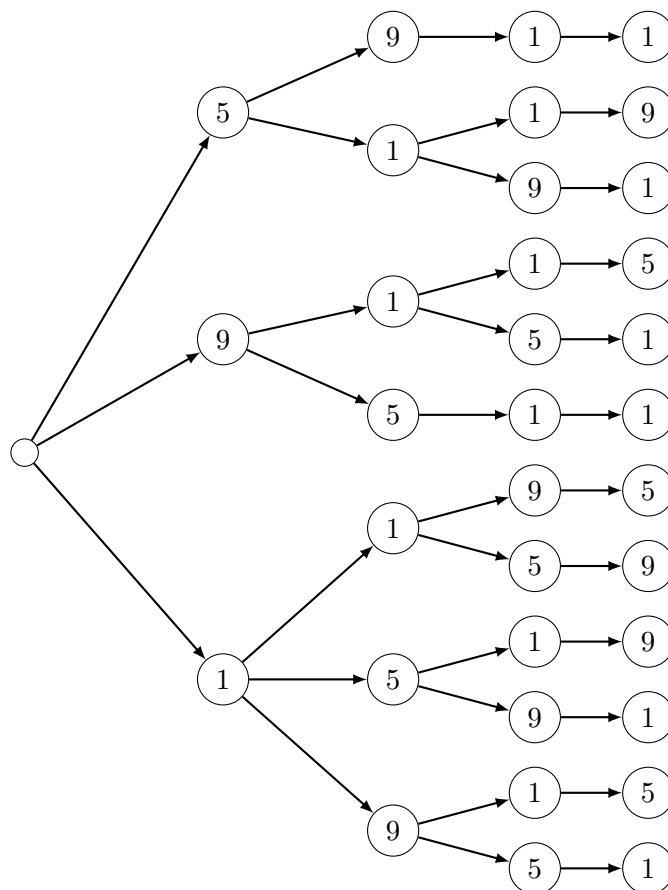


Il y a deux couples comportant les éléments F et G sur les 4 couples possibles. La probabilité est donc de $\frac{2}{4}$ soit $\frac{1}{2}$.

2. Il n'y a qu'un seul couple ne comportant pas l'élément F. Il reste donc 3 couples sur les 4. La probabilité est donc de $\frac{3}{4}$.

Exercice n°3

1. Là encore, on peut utiliser un arbre pour représenter l'ensemble des combinaisons possibles :



Il y a 12 combinaisons possibles.

2. La probabilité que Jean-Kevin trouve du premier coup est de $\frac{1}{12}$.

La probabilité que Jean-Kevin trouve du deuxième coup est de $\frac{1}{11}$.

La probabilité que Jean-Kevin trouve du troisième coup est de $\frac{1}{10}$.

La probabilité qu'il verrouille son smartphone est donc de $\left(1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{11} - \frac{1}{10}\right) \times 100 \approx 73$ soit environ 73%.

Exercice n°4

1. On utilise un tableau à double entrée :

F \ E	1	2	3	4
rouge	(1 ; rouge)	(2 ; rouge)	(3 ; rouge)	(4 ; rouge)
bleu	(1 ; bleu)	(2 ; bleu)	(3 ; bleu)	(4 ; bleu)
vert	(1 ; vert)	(2 ; vert)	(3 ; vert)	(4 ; vert)

2. $\text{Card}(E^3) = \text{Card}(E)^3 = 4^3 = 64$.

On a par exemple (1 ; 3 ; 4) ou encore (3 ; 4 ; 1) ou (1 ; 2 ; 3).

3. E possède 4 éléments. Le nombre de permutations de 5 est donc de $4!$ soit 24.

> Effectuer des dénombrements

Exercice n°5

1. Cela revient à prendre un élément de chacun des ensemble « entrées », « plats » et « desserts ».

On fait donc le produit des cardinaux de chacun de ces trois ensembles : $4 \times 5 \times 3 = 60$.

Jean-Kevin peut former 60 menus différents.

2. Si on fixe le plat, il reste $4 \times 3 = 12$ menus différents possibles.

Exercice n°6

Il s'agit ici de l'ensemble des permutations possibles d'un ensemble de 18 éléments.

Le nombre de permutations possibles est de $18!$ soit environ $6,4 \times 10^{15}$ classements possibles (millions de milliards).

Exercice n°7

1. Pour $\text{Card}(A)$: Il y a 26 lettres de l'alphabet. On utilise deux éléments, pas forcément distincts de cet ensemble.

On a alors $\text{Card}(A) = 26^2 = 676$.

Pour $\text{Card}(C)$: Il y a 10 chiffres. On utilise 10 éléments de cet ensemble, pas forcément distincts.

On a alors $\text{Card}(C) = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$.

2. $\text{Card}(A) \times \text{Card}(C) = 676 \times 10\,000\,000\,000 = 6\,760\,000\,000\,000$.

Exercice n°8

$4 \times 5 \times 3 = 60$. Il a 60 façons de s'habiller.

Exercice n°9

On cherche ici le nombre de 15-uplets possibles.

Puisqu'il y a 4 choix possibles, il y a 4^{15} façons de répondre soit 1 071 741 824.

Exercice n°10

On a le choix entre deux éléments : 0 ou 1.

On doit dénombrer le nombre de 8-listes.

Ce nombre est de 2^8 soit 256.

Exercice n°11

1. Pour le premier chiffre : 9 possibilités.

Pour le second : 10 possibilités tout comme le troisième et le dernier.

Cela donne $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000$ nombres possibles.

2. Pour le premier chiffre, il y a 9 possibilités parmi l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Pour les suivants, il faut prendre 3 chiffres parmi les 9 restants (10 possibilités de 0 à 9 moins le premier chiffre choisi). On va donc faire un arrangement de trois éléments parmi 9 :

$$9 \times 8 \times 7 = 504.$$

Le nombre total d'éléments recherché est donc 9×504 soit 4 536.

3. Le contraire d'au moins deux chiffres identiques est 4 chiffres distincts.

On prend donc le nombre total d'éléments de A moins le nombre d'éléments calculé à la question précédente.

$$9\,000 - 4\,536 = 4\,464.$$

4. Pour le premier chiffre, on choisit un élément de l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9\}$ soit 7 possibilités.

Pour le second chiffre, il y a également 7 possibilités (8 chiffres moins celui choisi précédemment).

Pour le troisième chiffre, il y a 6 possibilités.

Pour le dernier chiffre, il y a 5 possibilités.

Soit $7 \times 7 \times 6 \times 5 = 1\,470$ nombres possibles.

Exercice n°12

Le mot tableau comporte deux lettres identiques. On ne peut donc pas appliquer la formule des permutations avec le nombre de lettres de ce mot : $7!$.

On doit donc diviser ce nombre par le nombre de permutation de ces deux lettres : $2!$.

$$\frac{7!}{2!} = 2\,520.$$

Il y a 2 520 anagrammes du mots tableau.

Exercice n°13

Nombre de possibilités pour le premier numéro : 49.

Nombre de possibilités pour le deuxième numéro : 48.

Nombre de possibilités pour le troisième numéro : 47.

Nombre de possibilités pour le quatrième numéro : 46.

Nombre de possibilités pour le cinquième numéro : 45.

Nombre de possibilités pour le dernier numéro : 44.

$$\text{Soit } 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 \approx 1,0068 \times 10^{10}.$$

Plus de 10 milliards de grilles possibles.

Exercice n°14

1. $15 \times 14 \times 13 = 2\,730$.

Il y a 2 730 tiercés possibles.

2. $7 \times 6 \times 5 = 210$. Il y a 210 tirages possibles.

3. $30 = 1 \times 2 \times 3 \times 5$.

Les deux possibilités sont donc (1 ; 6 ; 5) et (2 ; 3 ; 5).

Le tirage favorable correspond donc à l'ensemble des permutations de l'ensemble {1 ; 6 ; 5} ou {2 ; 3 ; 5}.

$3! + 3! = 12$. Il y a donc 12 tirages favorables.

4. Il y a 5 lettres dans le mot mamie dont deux lettres identiques.

Le nombre d'anagrammes est donc donné par $\frac{5!}{2!} = 60$.

5. Pour le placement des deux consonnes : c'est un arrangement sans répétition de deux éléments parmi les 4 consonnes disponibles.

C'est donc $4 \times 3 = 12$.

Il reste ensuite les 4 autres lettres à placer : $4! = 24$.

Puis $12 \times 24 = 288$.

Exercice n°15

1. On place 3 cœurs parmi les 9 cases disponibles : $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 84$.

2. Il y a 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales ce qui donne un total de 8 grilles gagnantes.

La probabilité de gagner est de $\frac{8}{84} \times 100$ soit environ 9,5%.

Exercice n°16

1. On prend 2 lettres parmi 8 : $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8+2)!} = 28$. Il y a 28 tirages possibles.

2. Les tirages gagnants sont ceux ayant le A et une des 6 consonnes : 6 tirages. Mais aussi ceux ayant le E et une des 6 consonnes : 6 tirages. Cela donne donc au total 12 tirages gagnants.

$\frac{12}{28} = \frac{4 \times 3}{4 \times 7} = \frac{3}{7}$.