Méthode de Newton

Le méthode de Newton est un algorithme qui permet de résoudre des équations. On considère une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ où a et b sont deux réels. On souhaite résoudre l'équation $f(x) = 0$. Le principe est le suivant :

(1) On pose $a_0 = a$ et on trace la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en a_1.
(2) On trace ensuite la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a_1. Cette deuxième tangente coupe l'axe des abscisses en a_2.
(3) On construit ainsi une suite de réels a_n, $n \in \mathbb{N}$, où a_n est de plus en plus proche de la solution de notre équation.

C'est vers 1670 que Newton fait connaître cette méthode.

Application On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 3x - 5$. On souhaite trouver une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

A. Restreindre l'intervalle de recherche

1. Représenter graphiquement la fonction f à l'aide la calculatrice ou d'un logiciel de géométrie dynamique. Donner alors un intervalle de la forme $[\,a\,;\,b\,]$ où a et b dont deux entiers relatifs dans lequel semble se situer la solution de l'équation $f(x) = 0$.

.....

2. Déterminer la dérivée de la fonction f.

.....

3. Construire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[\,-3\,;\,3\,]$.

4. Donner alors un autre intervalle dans lequel se situe la solution de $f(x) = 0$.

.....

B. Recherche d'une valeur approchée de la solution en utilisant la méthode de Newton

On construit la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a où a_0 est un réel de l'intervalle trouvé dans la partie A. Cette tangente coupe l'axe des abscisse en a_1.

1. Donner l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

.....

2. Déterminer a_1 en fonction de a.

.....

.....

.....

.....

3. On va maintenant programmer cet algorithme sur Python. L'utilisateur saisira la valeur de a_0 et la marge d'erreur e souhaitée de la solution. Compléter le programme suivant :

```
1
2  def fonction(x):
3      return ...
4
5  def derivee(x):
6      return ...
7
8  def newton(a0,e):
9      erreur = 1
10     while erreur ...
11         x=...
12         erreur = abs(x-a0)
13         a0 = x
14     return x
```

4. Tester ce programme pour trouver une valeur approchée à 10^{-5} près de la solution de $x^3 - x^2 - 3x - 5 = 0$.

.....