Correction : vecteurs, droites et plans de l'espace

> Etudier la position relative de droites et plans de l'espace

Exercice n°1

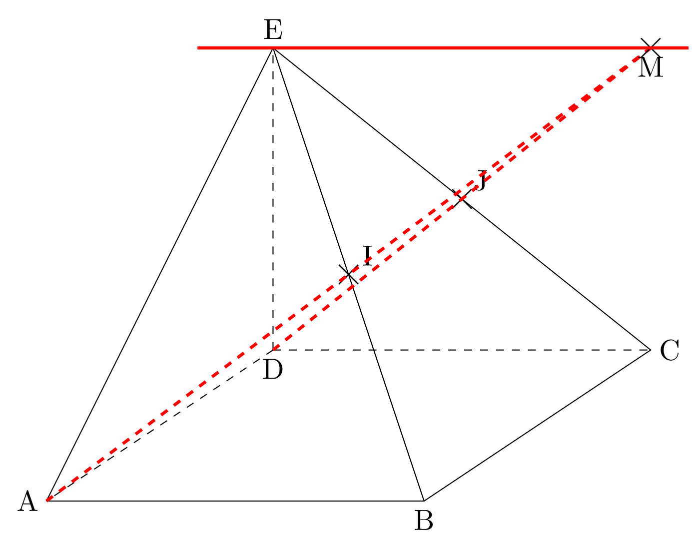
1. Les droites (AB) et (FG) n'appartiennent pas à un même plan : elles ne sont donc pas coplanaires.
2. Les droites (AB) et (HG) sont parallèles et ne sont pas confondues : donc disjointes.
3. Les droites (AG) et (BH) sont sécantes en O dans le plan (AGBH).

Exercice n°2

1. La droite (EH) est strictement parallèle au plan (AFG).
2. La droite (HD) et le plan (AFG) sont sécants en D.
3. La droite (FA) et le plan (DHG) sont strictement parallèles.
4. La droite (BC) et le plan (HFA) sont sécants. On ne peut pas voir le point d'intersection.

Exercice n°3

1. Dans le triangle EBC, la droite (IJ) passe par les milieux de deux côtés. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (IJ) est parallèle à (BC).
   ABCD étant un carré, les droites (AD) et (BC) sont aussi parallèles.
   Puisque (IJ) est parallèle à (BC) et que (BC) est parallèles à (AD) alors (AD) et (IJ) sont parallèles.
   Les points A, D, I et J appartiennent donc à un même plan : ils sont coplanaires.
2. Les points A, D, I et J sont coplanaires. Les droites (AI) et (DJ) ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point M.
3. Les plans (ABE) et (CDE) ont un point commun : E. Ces deux plans sont donc sécants selon une droite passant par E.



Puisque (AI) est incluse dans (ABE) et que (DJ) est incluse dans (DEC), le point d'intersection de ces deux droites appartient à la droite d'intersection de ces deux plans. L'intersection des plans (ABE) et (CDE) est donc la droite (EM).

> Combinaisons linéaires de vecteurs

Exercice n°4

1. K est sur le segment [AG], au deux-tiers du point A.
   Puisque $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$, on obtient $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$ et donc L est le milieu du segment [BG].

2. $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AH} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) = -\overrightarrow{AH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AH}$ (puisque $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$)
   Cela donne donc $\overrightarrow{HK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$.
   De plus, $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GL} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.
   Ce qui donne finalement $\overrightarrow{HL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{HL}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont colinéaires donc les points H, L et K sont alignés.

3. Puisque $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$, EIGC est un parallélogramme et on a l'égalité $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{GI}$.
   Les droites (CE) et (GI) sont donc parallèles.

4. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}$.

5. D'après la question précédente, on peut écrire : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}$.
   K est donc un point du plan (AIJ).

Exercice n°5

1. On va exprimer le vecteur $\overrightarrow{JG}$ en fonction de vecteurs colinéaires $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HF}$.
   $\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AH}$.
   Le vecteur $\overrightarrow{JG}$ s'exprime sous forme de combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{AH}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

2. Le vecteur $\overrightarrow{JG}$ est un vecteur du plan (AHF). La droite passant par K et de vecteur directeur $\overrightarrow{JG}$ est donc incluse dans le plan (AHF) et parallèle à la droite (JG).

3. Le vecteur $\overrightarrow{JG}$ n'est pas coplanaire au vecteur $\overrightarrow{HF}$ donc la parallèle à (JG) et la droite (HF) sont sécante en un point L.
   On a d'une part : $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HA} + x\overrightarrow{HF}$ où x est un réel.
   D'autre part, puisque (KL) et (JG) sont parallèles, il existe un réel λ tel que :
   $$\overrightarrow{KL} = \lambda\overrightarrow{JG} = \lambda\left((\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HF}\right) = -\lambda\overrightarrow{HA} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{HF}.$$
   On obtient donc le système suivant :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} -\lambda & = & -\frac{1}{2} \\ x & = & \frac{\lambda}{2} \end{array}\right.$$

On trouve alors $\lambda : \dfrac{1}{2}$ et $x = \dfrac{1}{4}$. Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{HL}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{HF}}$. L est sur le segment [HF], au quart de ce segment en partant de F.

> Base et repères de l'espace

Exercice n°6

Dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$, on a les coordonnées des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{\mathrm{EB}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AK}}\begin{pmatrix}1\\0,5\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AG}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

On cherche à montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{EB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AK}}$.
Cela revient à résoudre le système :

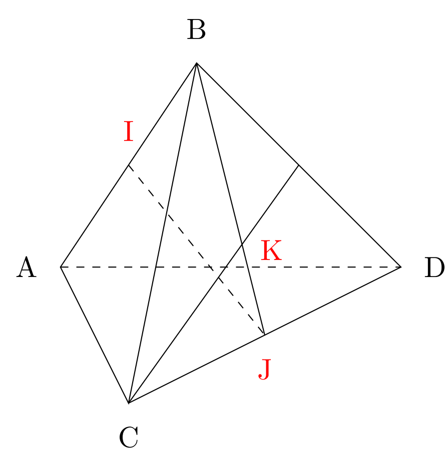
$$\begin{cases} \alpha + \beta & = & 1 \\ \dfrac{1}{2}\beta & = & 1 \\ -\alpha & = & 1 \end{cases}$$

On trouve alors $\alpha = -1$ et $\beta = 2$. Les trois vecteurs sont donc coplanaires.

Exercice n°7

Dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$, on a les coordonnées des vecteurs suivants :

$$\mathrm{I}\begin{pmatrix}0,5\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \mathrm{J}\begin{pmatrix}0\\0,5\\0,5\end{pmatrix} \qquad \mathrm{K}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$



Soit M le milieu de [IJ]. On a $\mathrm{M}\begin{pmatrix}0,25\\0,25\\0,25\end{pmatrix}$.

On peut écrire $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AK}}$. Ces deux vecteurs sont donc colinéaires et les points A, M et K sont donc alignés. Ainsi, les segments [AK] et [IJ] se coupent en M.

Exercice n°8

1. Dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$, on a les coordonnées suivantes : B$(1\,;\,0\,;\,0)$, C$(0\,;\,1\,;\,0)$ et D$(0\,;\,0\,;\,1)$.
   En utilisant les coordonnées du milieu, on a également B'$\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$, C'$\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$ et G$\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$.

   Le centre de gravité de BCD a pour coordonnées les moyennes des coordonnées des points B, C et D ce qui donne donc F$\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

   On a alors $4\overrightarrow{\mathrm{AG}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ qui sont tous les deux égaux au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Les points A, F et G sont donc alignés.

2. On a I$\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et J$\left(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
   Le milieu du segment [IJ] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ qui sont aussi celles du point G.
   De même, les milieux K et L ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$. Là encore, les coordonnées du milieu de [KL] sont égales à celles du point G.
   Cela prouve bien que les segments [B'C'], [IJ] et [KL] se coupent en G.

Exercice n°9

1. On a $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{\mathrm{BC}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 6 \times 1 + 0 \times (-5) + 2 \times (-3) = 0$.
   Le triangle BCD est donc rectangle en C.
   $\mathrm{BC} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et $\mathrm{CD} = \sqrt{6^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{70}$
   Puisque BC $\neq$ CD alors le triangle n'est pas isocèle.

   $$\mathcal{A}_{\mathrm{BCD}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{\mathrm{BC} \times \mathrm{CD}}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{70}}{2} = \frac{5\sqrt{14}}{2}.$$

2. Supposons que les droites (AC) et (BD) soit parallèles.
   Il existe alors un unique réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

   $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\begin{pmatrix}7\\-7\\-1\end{pmatrix}$.

   Cela donne donc le système :

   $$\begin{cases} -5 = 7\lambda \\ 6 = -7\lambda \\ 0 = -\lambda \end{cases}$$
   Ce système donne trois valeurs différentes de λ, ce qui contredit l'unicité.
   Les droites (AC) et (BD) ne sont donc pas parallèles.

Exercice n°10

1. Les points A, K et L sont alignés donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\mathrm{AL}} = k\overrightarrow{\mathrm{AK}}$.
   Or K est le milieu de [IJ] donc $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AI}} + \overrightarrow{\mathrm{AJ}}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$.
   Puisque J est le milieu de [CD] on a également $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})$.
   Donc $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.
   En utilisant les relations $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ on obtient : $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.
   On en déduit alors :
   $$\overrightarrow{\mathrm{BL}} = \overrightarrow{\mathrm{BK}} + k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right) = \left(1 - \frac{2k}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \frac{k}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{k}{4}\overrightarrow{\mathrm{BD}}.$$
   Puisque les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ ne sont pas coplanaires et que $\overrightarrow{\mathrm{BL}}$ est un vecteur de (BCD), on a $1 - \frac{2k}{3} = 0$ donc $k = \frac{3}{2}$.
   Cela donne finalement $\overrightarrow{\mathrm{BL}} = \frac{\frac{3}{2}}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{\frac{3}{2}}{4}\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.
   Les coordonnées du point L dans le plan $(\mathrm{B}\,;\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BD}})$ sont donc $\mathrm{L}\left(\frac{3}{8}\,;\,\frac{3}{8}\right)$.
2. Puisque J est le milieu de [CD] on a $\overrightarrow{\mathrm{BJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$. Donc $\overrightarrow{\mathrm{BL}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$.
   Ces deux vecteurs sont donc colinéaires ce qui signifie que les points B, L et J sont alignés.