

Schéma de Bernoulli : approfondissement

Loi géométrique

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli et on note la probabilité de succès p .

On répète cette expérience aléatoire jusqu'à obtenir le succès une première fois. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais nécessaires pour y parvenir.

On dit alors que X suit la **loi géométrique** de paramètre p .

Propriétés

- Si X suit la loi géométrique de paramètre p alors $p(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.
- On a également $E(X) = \frac{1}{p}$.

Exercice n°1

On joue au jeu suivant : on lance le dé autant de fois que l'on souhaite mais on s'arrête dès que l'on obtient le 2. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers de dés nécessaires jusqu'à l'obtention du 2.

1. Calculer $p(X = 3)$, et $p(X \leq 8)$.
2. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.
3. A l'aide d'un diagramme en barres, représenter les $p(X = k)$ pour k compris entre 1 et 20.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$ puisqu'il y a une chance sur 6 de tomber sur le 2.

$$p(X = 3) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} = \frac{25}{216}.$$

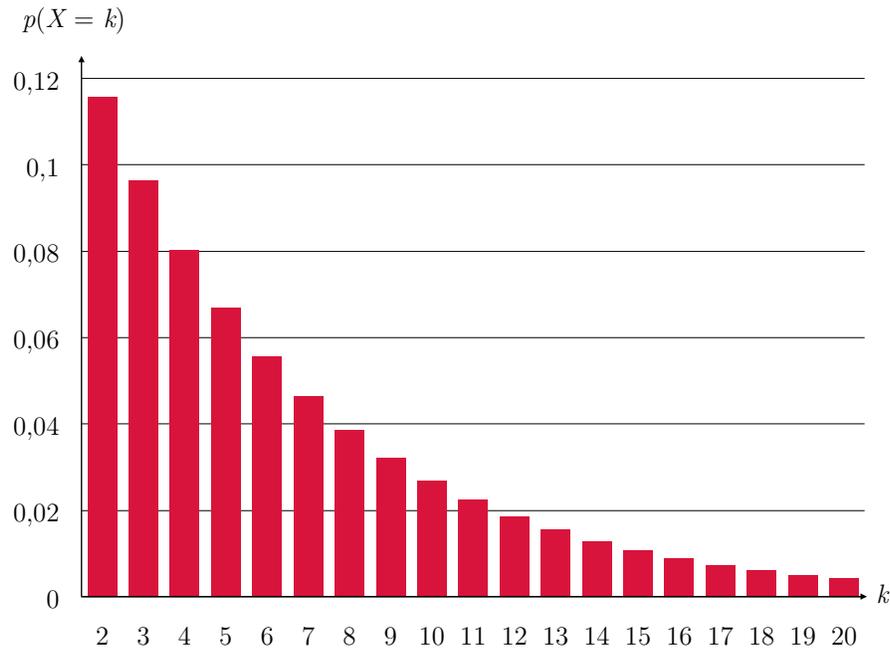
$$\begin{aligned} p(X \leq 8) &= p(X = 1) + p(X = 2) + \dots + p(X = 8) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \dots + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^7 \\ &\approx 0,77. \end{aligned}$$

2. $E(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$. Cela signifie qu'en moyenne, il faut 6 lancers pour obtenir le 2.

3. Dans la colonne A, on fait apparaître les valeurs de k tel que $1 \leq k \leq 20$.

Dans la colonne B, les probabilités $p(X = k)$ correspondantes. Dans B1, on rentrera « $=(1/6)*(5/6)^{k-1}$ ».

Voici le résultat obtenu :



On observe, en quelque sorte, l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.