Correction des exercices sur la dérivation

> révisions de la dérivation de première

Exercice n°1

a. $f'(x) = -8x + 56$.

b. On pose $u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = 2x + 1$. On a donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{3(2x+1) - 2(3x-4)}{(2x+1)^2} = \frac{11}{(2x+1)^2}.$$

c. On pose $u(x) = 8 + 3x$ et $v(x) = 1 - 6x$. On a donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = -6$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{3(1-6x) - (-6)(8+3x)}{(1-6x)^2} = \frac{49}{(1-6x)^2}$$

Exercice n°2

a. On pose $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 2x - 8$. On a donc $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 2$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-8) - 2\sqrt{x}}{(2x-8)^2} = \frac{\frac{2x-8-4x}{2\sqrt{x}}}{(2x-8)^2} = (2x-8)^2 \times \frac{-2x-8}{2\sqrt{x}}.$$

b. $f'(x) = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{4x+9}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+9}}$.

c. On pose $u(x) = x^2 + 4x - 8$ et $v(x) = x^2 + 1$. On a donc $u'(x) = 2x + 4$ et $v'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(2x+4)(x^2+1) - 2x(x^2+4x-8)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2 - 6x + 12}{(x^2+1)^2}$$

Exercice n°3

1. On pose $u(x) = 10x + 4$ et $v(x) = 5x^2 + 1$. On a donc $u'(x) = 10$ et $v'(x) = 10x$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{10(5x^2+1) - 10x(10x+4)}{(5x^2+1)^2} = \frac{-50x^2 - 40x + 10}{(5x^2+1)^2}.$$

2. Voici le tableau de variations avec les limites aux infinis :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	0

3. $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ce qui donne $y = 10x + 4$.

4. On étudie le signe de $f(x) - (10x+4)$.

$$f(x) - (10x+4) = \frac{10x+4}{5x^2+1} - (10x+4) = \frac{10x+4}{5x^2+1} - \frac{(10x+4)(5x^2+1)}{5x^2+1} = \frac{5x^2(10x+4)}{5x^2+1}.$$

Pour tout réel x, $5x^2+1 > 0$ et $5x^2 \geqslant 0$.

Mais $10x+4 > 0$ pour $x > \frac{2}{5}$. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de cette tangente quand $x > \frac{2}{5}$ et en dessous sinon.

> Composition de fonctions et dérivation

Exercice n°4

a. On pose $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = e^x$. Ainsi, $f(x) = v(u(x)$ et donc $f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

Donc $f'(x) = e^{x^2+1} \times 2x = 2xe^{x^2+1}$.

b. $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2+4x-1$. Donc $u'(x) = 6x+4$.

Donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x-1}} = \dfrac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-1}}$.

c. $f(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = 2x^2+3x-3$. Donc $u'(x) = 4x+3$.

Donc $f'(x)4u'(x)(u(x))^3 = 4(4x+3)(2x^2+3x-3)^3$.

d. $f(x) = 2e^{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Donc $f'(x)2u'(x)e^{u(x)} = 2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = -\dfrac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

Exercice n°5

a. $f'(x) = \dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$.

b. $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$.

c. $f(x) = (x^2+2)^{-2}$ donc $f'(x) = -2 \times 2x \times (x^2+2)^{-3} = \dfrac{-4x}{(x^2+2)^3}$

Exercice n°6

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^3}{x-1}$ est strictement positive sur $]1\,;\,+\infty[$. Elle est également dérivable sur cet intervalle comme quotient de deux fonctions dérivable, le dénominateur ne s'annulant pas.
   La fonction racine carrée est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Ainsi, f est dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$.

2. $f'(x) = \dfrac{\dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}} = \dfrac{2x^3-3x^2}{2(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}$

> Etudier des fonctions

Exercice n°7

1. Pour tout $x \in]-1\,;\,1[$, $1-x^2 > 0$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable et donc f l'est aussi comme produit de fonctions dérivables.

   $$f'(x) = -1 \times \sqrt{1-x^2} + (1-x) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1-x^2)-x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $f'(x)$ est du signe de $2x^2-x-1$. Ce trinôme s'annule en $-0,5$ et 1.
   f' est positive sur $]-1\,;\,-0,5]$ puis négative sur $[-0,5\,;\,1[$.
   Finalement, f est croissante sur $]-1\,;\,-0,5]$ puis croissante sur $[-0,5\,;\,1[$.

3. Soit h un réel strictement positif.

   $$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{(2-h)\sqrt{-h^2+2h}}{h} = (2-h)\sqrt{-1+\frac{2}{h}}.$$

   Or $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{2}{h} = +\infty$. La fonction f n'est donc pas dérivable en -1.

4. Soit h un réel strictement positif.

   $$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{-h\sqrt{-h^2-2h}}{h} = -\sqrt{-h^2-2h}.$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{-h^2 - 2h} = 0$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

Exercice n°8

1. La fonction f est définie quand $x^2 - 1 \geqslant 0$. L'ensemble de définition de la fonction f est donc $]-\infty\,;\,-1[\,\bigcap\,[1\,;\,+\infty[$.

2. $f(-x)f(x) = (-x + \sqrt{x^2-1})(x = \sqrt{x^2-1}) = x^2 - 1 - x^2 = -1$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   Puisque $f(-x)f(x) = -1$ alors $f(x) \neq 0$ pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f.
   Ainsi : $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

4. $f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x^2-1-x^2}{(\sqrt{x^2-1}-x)\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{-1}{(\sqrt{x^2-1}-x)\sqrt{x^2-1}}$

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$		$-$			$+$		
$f(x)$	0	$\searrow$	-1		1		$+\infty$

Exercice n°9

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$.
   De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

   $f(x) = \dfrac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = 2\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}$. En posant $X = \dfrac{x}{2}$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. $f'(x) = 1 \times e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \dfrac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$.

3. Pour tout réel x, $e^{-\frac{x}{2}} > 0$. Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \dfrac{x}{2}$ c'est à dire positive sur $]-\infty\,;\,2]$ et négative sur $[2\,;\,+\infty[$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\searrow$	0

4. Voici la courbe représentative de la fonction f :