Equation polynomiale : résolution par radicaux

Principe

On considère une équation de degré 3 (E) : $ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a est non nul.
Puisque a est non nul, on peut écrire :

$$(\mathrm{E}) : x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

En posant de nouveaux coefficients, on peut ainsi écrire :

$$(\mathrm{E}) : x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$$

L'idée maintenant est d'éliminer le coefficient en x^2. On réalise un changement de variable en posant $X = x + \frac{b'}{3}$.
De ce fait, on a $x = X - \frac{b'}{3}$. On obtient alors :

$$\left(X - \frac{b'}{3}\right)^3 + b'\left(X - \frac{b'}{3}\right)^2 + c'\left(X - \frac{b'}{3}\right) + d' = 0$$

Après avoir développé et simplifié, on trouve :

$$X^3 + \left(-\frac{b'^2}{3} + c'\right)X + \frac{2b'^3}{27} - \frac{b'c'}{3} + d' = 0$$

On pose enfin $p = -\frac{b'^2}{3} + c'$ et $q = \frac{2b'^3}{27} - \frac{b'c'}{3} + d'$ pour obtenir l'équation réduite :

$$X^3 + pX + q = 0$$

Le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe au moins une solution à cette équation.

Formule de Cardan

Pour tout réel u et v, on a $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u+v) + (u^3+v^3)$ que l'on peut aussi écrire

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0$$

ce qui ressemble à notre précédente équation réduite, en posant $p = -3uv$ et $q = -(u^3 + v3)$ on a $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$.
On posera ensuite $u^3v^3 = -\frac{p}{27}$ et $(u^3+v^3) = -q$ puis, $ab = -\frac{-p}{27}$ et $a + b = -q$.

De ce fait, on revient à un problème où on connaît la somme $S = a + b$ et le produit $P = ab$. Or a et b sont solution de $X^2 - SX + P$.

Formule de Cardan : suite

$\Delta = S^2 - 4 \times 1 \times P = q^2 + \dfrac{4p^3}{27} = \dfrac{4p^3 + 27q^2}{27}$.

Si le numérateur est positif, on obtient :

$$a = \frac{S - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{S + \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

Puisque a et b sont les cubes de u et v et puisque $x = u + v$ on trouve finalement :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}$$

que l'on peut aussi écrire en rentrant le $\dfrac{1}{2}$ sous le radical :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

C'est ce que l'on appelle la formule de Cardan.

Exercice n°1

Résoudre l'équation $x^3 + 3x + 2 = 0$.

Exercice n°2

Résoudre l'équation $3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$.

> Correction des exercices

Exercice n°1

On peut appliquer directement la formule de Cardan avec $p = 3$ et $q = 2$.

On trouve alors $x = \sqrt[3]{-1-\sqrt{1+1}} + \sqrt[3]{-1+\sqrt{1+1}} = \sqrt[3]{-1-\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} \approx -0,596071$

Exercice n°2

On ne peut pas appliquer la formule de Cardan. Il faut d'abord se ramener à l'équation réduite en utilisant les formules de l'encadré « Principe ».

$3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0.$

On pose ensuite le changement de variable $x = X - \frac{b'}{3}$ soit $x = X - \frac{\frac{4}{3}}{3}$

Cela donne donc $X^3 + \left(-\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \right) X + \frac{2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3}{27} - \frac{\frac{4}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)}{3} + \frac{1}{3} = 0$

Soit en simplifiant :

$$X^3 - \frac{34}{27}X + \frac{587}{729} = 0$$

On peut maintenant appliquer la formule de Cardan avec $p = -\frac{34}{27}$ et $q = \frac{587}{729}$.