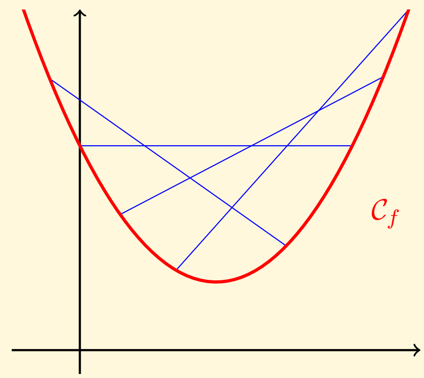
Convexité

1 Convexité d'une fonction

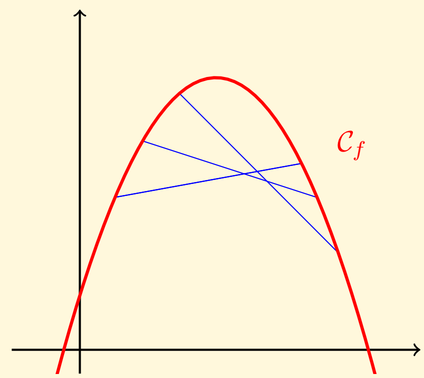
Définition : fonction convexe

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. On dit que f est **convexe** sur I si, pour tous points A et B de $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située en dessous du **segment** [AB].



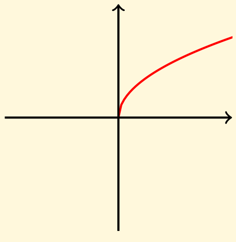
Définition : fonction concave

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. On dit que f est **concave** sur I si, pour tous points A et B de $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus du **segment** [AB].

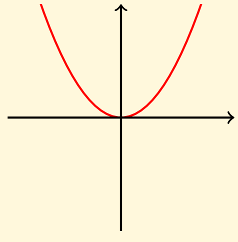


Exemple

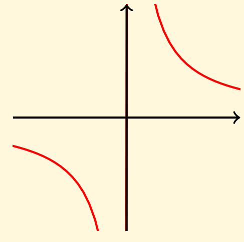
La fonction racine carrée est concave sur $\mathbb{R}$.



La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$.



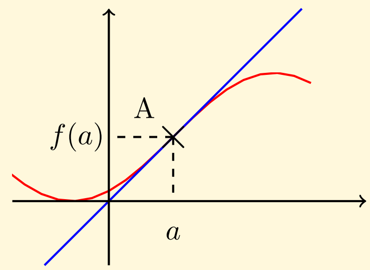
La fonction inverse est concave sur $]-\infty\,;0\,[$ et convexe sur $]\,0:+\infty\,[$.



2 Point d'inflexion

Définition : point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. Soit $a \in I$.
Dire que le point $\mathrm{A}(a\,;\,f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ signifie qu'au point d'abscisse a, la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en a.



Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ possède un point d'inflexion en $\mathrm{A}(0\,;\,0)$.

Propriété : changement de convexité

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. Soit $\mathrm{A}(a\,;\,f(a))$ un point d'inflexion de f en a.
Au point A, f change de convexité : elle passe de convexe à concave ou inversement.

3 Caractérisation de la convexité

Définition : dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit f' sa dérivée, elle aussi dérivable sur I.
On appelle **dérivée seconde** de f la fonction dérivée de f' que l'on note f''.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$.
La dérivée seconde de f est la dérivée de f' on a donc $f''(x) = 6x$.

Propriété : caractérisation de la convexité

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow f''$ est positive sur I
- f est concave sur $I \Leftrightarrow f'$ est décroissante sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow f''$ est négative sur I

Démonstration

Supposons que f' soit croissante sur I.

Soit g la fonction dérivable sur I et définie par $g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$. On a alors $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
Puisque f' est croissante sur I alors g' est aussi croissante sur I. On a également $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$. On en déduit donc que pour $x \leqslant a$, $g'(x) < 0$ et que pour $x \geqslant a$, $g'(x) > 0$.
On obtient le tableau de variations suivants :

x		a	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

Pour tout $x \in I$ on a donc $g(x) \leqslant 0$ ce qui signifie que $f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \leqslant 0$ et donc $f(x) \leqslant f'(a)(x-a) + f(a)$.
La fonction f est donc au dessus de ses tangentes : elle est convexe.

La démonstration est similaire pour montrer que si f' décroissante alors f concave.

Propriété : point d'inflexion et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_f$ se courbe représentative dans un repère et soit a un réel de l'intervalle I.
$\mathrm{A}(a\,;\,f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f \Leftrightarrow f''$ s'annule en a en changeant de signe.

Exemple

On considère la fonction cube. Sa dérivée seconde est définie par $f''(x) = 6x$.
Le tableau de signe sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Le point $\mathrm{A}(0\,;\,0)$ est donc un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube.