



## Déterminer un encadrement par balayage

### Principe

Le but de cette activité est d'encadrer le nombre irrationnel  $\sqrt{2}$  entre deux nombres réels  $a$  et  $b$ . On cherche donc  $a$  et  $b$  tels que :

$$a < \sqrt{2} < b$$

Par passage au carré, on arrive à  $a^2 < 2 < b^2$ . Or, on a aussi  $1 < 2 < 3$ . L'idée est donc de partir de  $a = \sqrt{1} = 1$  et de lui ajouter un pas très petits jusqu'à arriver à notre inégalité.

Prenons comme pas  $10^{-n}$  où  $n$  est un entier naturel. On souhaite donc arriver à

$$a^2 < 2 < (a + 10^{-n})^2$$

### Exercice n°1

1. Commençons avec  $a = 1$  et  $b = a + 0,1$ . A-t-on  $a^2 < 2 < b^2$  ?
2. On pose maintenant  $a = b = 1,1$  puis  $b = a + 0,1$ . A-t-on  $a^2 < 2 < b^2$  ?
3. En vous inspirant des deux précédentes questions, compléter le tableau suivant :

Valeurs de $a$	1	1,1	1,2	1,3	1,4
Valeurs de $b$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
Valeurs de $a^2$					
Valeurs de $b^2$					
A-t-on $a^2 < 2 < b^2$ ?					

4. Donner alors un encadrement de  $\sqrt{2}$  à  $10^{-1}$  près.
5. On souhaite automatiser cette méthode sur Python afin d'obtenir un encadrement de  $\sqrt{2}$  à  $10^{-n}$  près où  $n$  sera choisi par l'utilisateur.

Compléter le programme Python suivant :

```

1 from math import*
2 def balayage(n):
3     a=?
4     b=?
5     x = sqrt(2) # racine carrée de 2
6     e = 0
7     while e > -n:
8         e = e - 1
9         while x > a:
10            a = ?
11            b = ?
12            a = b - 10**e
13     return ?

```

6. Tester ce programme et donner un encadrement de  $\sqrt{2}$  à  $10^{-12}$  près.

## &gt; Correction des exercices

Exercice n°1

1. Si  $a = 1$  alors  $b = 1 + 0,1 = 1,1$ . Or  $1,1^2 = 1,21$  donc 2 n'est pas compris entre  $a^2$  et  $b^2$ .
2. Cette fois,  $a = 1,1$  et  $b = 1,1 + 0,1 = 1,2$ . Or  $1,2^2 = 1,44$  donc 2 n'est pas compris entre  $a^2$  et  $b^2$ .
3. On a le tableau suivant :

Valeurs de $a$	1	1,1	1,2	1,3	1,4
Valeurs de $b$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
Valeurs de $a^2$	1	1,21	1,44	1,69	1,96
Valeurs de $b^2$	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25
A-t-on $a^2 < 2 < b^2$ ?	Non	Non	Non	Non	Oui

4. On a donc  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ .
5. Voici le programme complété :

```

1 from math import*
2 def balayage(n):
3     a=1
4     b=2
5     x = sqrt(2) # racine carrée de 2
6     e = 0
7     while e > -n:
8         e = e - 1
9         while x > a:
10            a = a + 10**e
11
12            b = a
13            a = b - 10**e
14
15     return a,b

```

6. Voici ce que nous donne le programme :

```

>>> print(balayage(12))
>>> (1.414213562373, 1.4142135623740002)

```

On a donc  $1.414213562373 < \sqrt{2} < 1.414213562374$ .