Exercices sur la concentration, loi des grands nombres

> Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice n°1

20% des habitants d'un pays sont atteints par un virus C.
1 000 personnes rentrent dans une salle de spectacle. La population du pays est suffisamment importante pour assimiler l'entrée de chaque personne à un tirage aléatoire avec remise.
Soit S la variable aléatoire comptant le nombre de personnes malades obtenus sur les 1 000 personnes.

1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que $P(174 < S < 226) \geqslant 0,76$.
2. Calculer $P(174 < S < 226)$ et le comparer au résultat précédent. Que peut-on en conclure ?

Exercice n°2

Soit une variable aléatoire X suivant $\mathcal{B}(20\,;\,0,1)$.

1. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 2\sigma(X)$.
   Interpréter ce résultat.
2. Faire de même en posant cette fois $\delta = 3\sigma(X)$ puis $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?
3. Simuler N valeurs de X avec Python et estimer $P(|X-2| \geqslant 2\sigma(X))$.

Exercice n°3

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,2. On considère un échantillon de n variables suivant la même loi que X.
On note M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Déterminer la taille n de cet échantillon tel que la probabilité que M_n appartienne à]0,03 ; 0,37[soit supérieure à 0,95.

Exercice n°4

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse. On souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue pour cela un prélèvement de n pièces de cette usine. On suppose que le prélèvement peut être assimiler à n tirages indépendants et avec remise.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses.

1. Quelle est la loi suivie par X_n ? Exprimer alors son espérance et sa variance.
2. Montrer que pour tout $\delta > 0$, $P\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\delta^2}$.
3. En déduire une condition sur n pour que $\dfrac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.