Modèle proie - prédateur

Principe

Un modèle proie-prédateur est un modèle où l'on considère deux espèces dont l'une est croquée par l'autre.
Il s'agit de pouvoir prédire l'évolution des effectifs de proies et de prédateurs au cours du temps.

Exercice n°1 *Nouvelle Calédonie Novembre 2017*

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies). Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel n, cette évolution par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_0 & = & 1000 \\ c_0 & = & 1500 \\ b_{n+1} & = & 0,3b_n + 0,5c_n \\ c_{n+1} & = & -0,5b_n + 1,3c_n \end{array}\right.$$

où b_n représente approximativement le nombre de buses et c_n le nombre approximatif de campagnols le 1er juin de l'année $2000 + n$.

1. On note $A = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 1050 \\ 1450 \end{pmatrix}$ puis calculer U_2.
   (b) Vérifier que, pour tout entier naturel n on a $U_{n+1} = AU_n$.

   On donne les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On admet que P a pour inverse la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel.
   (a) Déterminer la valeur de a.
   (b) On admet que $A = PTQ$. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $A^n = PT^nQ$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n $T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}$
3. On admet que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$U_n = \begin{pmatrix} 1000 \times 0,8^n + \dfrac{625}{2}n + 0,8^n \\ \\ 1500 \times 0,8^n + \dfrac{625}{2}n \times 0,8^n \end{pmatrix}$$
   On admet également que $n \leqslant 10 \times 1,1^n$.
   (a) En déduire les limites des suites (b_n) et (c_n).
   (b) Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus.
   A la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice vous paraît-il cohérent ?

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. (a) Puisque $\left\{\begin{array}{lll} b_{n+1} & = & 0,3b_n + 0,5c_n \\ c_{n+1} & = & -0,5b_n + 1,3c_n \end{array}\right.$

alors $b_1 = 0,3 \times 1000 + 0,5 \times 1500 = 1050$ et $c_1 = -0,5 \times 1000 + 1,3 \times 1500 = 1450$.

De même, $b_2 = 0,3 \times 1050 + 0,5 \times 1450 = 1040$ et $c_2 = -0,5 \times 1050 + 1,3 \times 1450$.

(b) Puisque $\left\{\begin{array}{lll} b_{n+1} & = & 0,3b_n + 0,5c_n \\ c_{n+1} & = & -0,5b_n + 1,3c_n \end{array}\right.$, on peut écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Ce qui revient à $U_{n+1} = AU_n$.

2. (a) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times a & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times a & 1 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+a & 1 \end{pmatrix}$

$PQ = I \Leftrightarrow 1 + a = 0 \Leftrightarrow a = -1$. Ainsi, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on a bien $QP = I$. La matrice Q est la matrice inverse de P.

(b) Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation

Puisque l'on a admis que $A = PTQ$ la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n supérieur ou égale à 1, on ait $A^n = PT^nQ$.
$A^{n+1} = A \times A^n = (PTQ) \times (PT^nQ) = P(T(QP)T^n)Q$. Or $QP = I$ donc $TPQ = TI$ et $T \times T^n = T^{n+1}$.
Finalement, $A^{n+1} = PT^{n+1}Q$ la propriété est héréditaire.

Conclusion

La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire à partir de ce rang : elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

(c) Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation

Pour $n = 1$, $\begin{pmatrix} 0,8^1 & 0,5 \times 1 \times 0,8^{1-1} \\ 0 & 0,8^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} = T$
La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1, on ait $T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n \times T \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^n \times 0,8 + 0,5n \times 0,8^{n+1} \times 0 & 0,8^n \times 0,5 + 0,5n \times 0,8^{n-1} \times 0,8 \\ 0 \times 0,8 + 0,8^n \times 0 & 0 \times 0,5 + 0,8^n \times 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^{n+1} & 0,5(n+1) \times 0,8^n \\ 0 & 0,8^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion

La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

3. (a) D'après la matrice U_n, on a $b_n = 1000 \times 0,8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0,8^n$ et $c_n = 1500 \times 0,8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0,8^n$ pour tout entier naturel n.

   De plus, b_n et c_n correspondent respectivement aux nombres de buses et de campagnols donc ce sont des nombres positifs.
   On sait également que $n \leqslant 10 \times 1,1^n$ donc $1000 \times 0,8^n + \dfrac{625}{2} n \times 0,8^n \leqslant 1000 + 0,8^n + \dfrac{625}{2} \times 10 \times 1,1^n \times 0,8^n$.
   On en déduite donc que $b_n \leqslant 1000 \times 0,8^n + 3125 \times 0,88^n$.
   D'après les propriétés sur les limites de suites géométriques, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,88^n = 0$.

   Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1000 \times 0,8^n + 3125 \times 0,88^n = 0$.
   On sait que $0 \leqslant b_n \leqslant 1000 \times 0,8^n + 3125 \times 0,88^n$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.

   De la même façon, on montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$.

   (b) On a $c_n > 50$. Or, d'après ce que l'on vient de voir, le nombre de campagnols tend vers 0 donc deviendra plus petit que 50 à partir d'un certain rang. Le modèle proposé n'est donc pas cohérent.