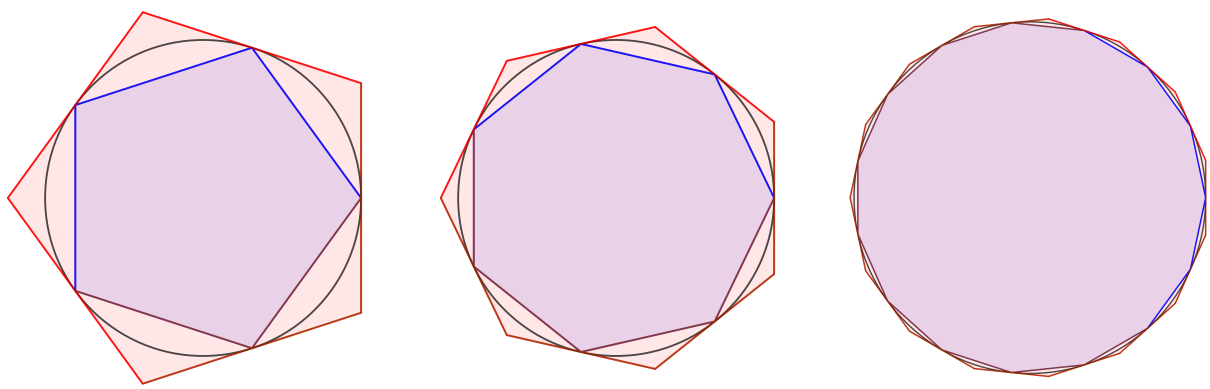
La méthode d'Archimède

La **méthode d'Archimède** consiste à donner une approximation de π. Pour réaliser cela, on va construire des polygones réguliers à n côtés inscrits et circonscrits à un cercle de rayon $\frac{1}{2}$. On va ensuite calculer le périmètre de ces polyones.
Le périmètre d'un tel cercle est π. Donc plus le nombre de côtés de ces polygones sera élevé, plus l'approximation de π sera bonne.

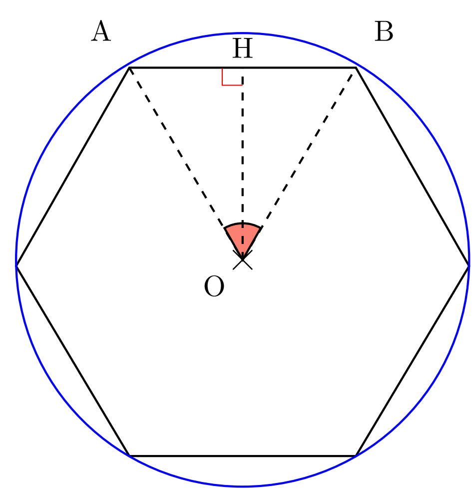


$n = 5$ $n = 7$ $n = 15$

On note a_n le périmètre d'un polygone inscrit à n côtés et on note b_n le périmètre d'un polygone circonscrit à n côtés. Le but est de déterminer une expression de a_n et de b_n en fonction de n et de calculer des valeurs de ces réels pour des n très grands.

1 Périmètre des polygones inscrits

On prend le cas de la figure ci-contre. On va déterminer la longueur d'un côté du polygone avant d'en déduire son périmètre. Pour cela, on prend deux sommets consécutifs A et B. On note H le pied de la hauteur issue de O.



1. Quelles sont les valeurs des longueurs de AO et OB ?

   ....

2. Donner, en radian, la mesure de l'angle $\widehat{AOH}$.

   ....

3. En utilisant les formules de trigonométrie dans un triangle rectangle, exprimer AH en fonction de n.

    ....

    ....

    ....

    ....

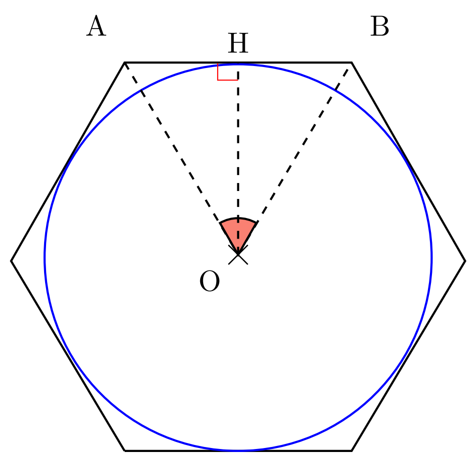
4. En déduire l'expression de a_n.

    ....

    ....

2 Périmètre des polygones circonscrits

On prend cette fois-ci la figure ci-contre. En résonant de la même façon que pour la précédente partie, déterminer la longueur de AH, puis de AB et enfin de b_n.



....

....

....

....

....

....

....

....

3 Direction Python !

Maintenant que l'on a déterminer, en fonction du nombre de côtés n, les périmètres a_n et b_n, il est temps de tester cette méthode d'approximation sur Python.

1. Écrire une fonction Archimède qui prend en paramètre une variable entière n représentant le nombre de côtés des polygones qui renvoie le couple $(a_n \,;\, b_n)$.

2. Tester le programme pour $n = 5$. Quelle approximation est meilleure ?

....

....

3. On cherche une valeur approchée de π à 10^{-p} près. On remarque, que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant \pi \leqslant b_n$.
   Il suffit donc d'avoir $b_n - a_n \leqslant 10^{-p}$ pour obtenir l'approximation recherchée.
   A quelle condition sort-on de la boucle ?

```
1 def ArchimedePrecision(p):
2     n = 4
3     a,b = archimedeSimple(4)
4     while ... :
5         n = ...
6         a,b = archimedeSimple(n)
7     return a,b,n
```

....

....

4. Que représentent les variables p et n ?

....

....

5. Compléter les lignes 4 et 5 du programme.

6. En testant le précédent programme, pour quelle valeur de n a-t-on une précision de 10^{-10} .

....

....

....