

Correction : fonction exponentielle

> Utiliser les propriétés de la fonction exponentielle

Exercice n°1

a. $\frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = e^{7+(-4)-(-5)} = e^8$

b. $(e^5)^{-6} \times e^{-3} = e^{5 \times (-6) + (-3)} = e^{-33}$

c. $\frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} = e^6 + 1$

d. $\frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}} = \frac{e^{6x}}{e^{3x+1-x-1}} = \frac{e^{6x}}{e^{2x}} = e^{4x}$

Exercice n°2

a. $\frac{e^{3x} \times e^{-1}}{e^{x-3}} = e^{3x-1-(x-3)} = e^{2x+2}$

b. $\frac{e^3 \times e^x}{e^{-5} \times e^{-x}} = e^{3+x-(-5+(-x))} = e^{2x+8}$

c. $\frac{1}{e^x} \times \frac{1}{e^{x+1}} = e^{-x} \times e^{-x-1} = e^{-x-x-1} = e^{-2x-1}$

d. $\frac{e^{2x}}{x} + \frac{e^{-x}}{1+e^x} = \frac{e^{2x}(1+e^x) + xe^{-x}}{x(1+e^x)} = \frac{e^{2x} + e^{3x} + xe^{-x}}{x(1+e^x)}$

Exercice n°3

a. $f'(x) = e^x + 2x$

b. $f'(x) = 3e^x + 4$

c. $f'(x) = 6x - 4e^x$

d. On pose $u(x) = x - 1$ et $v(x) = e^x$. On a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.
Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

e. On pose $u(x) = e^x$ et $v(x) = x + 1$. On a alors $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$.
Donc $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

f. On pose $u(x) = 1 + e^{2x}$ et $v(x) = e^{-3x} + 4$. On a alors $u'(x) = 2e^{2x}$ et $v'(x) = -3e^{-3x}$.
Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2e^{2x}(e^{-3x} + 4) + (1 + e^{2x})(-3e^{-3x}) = -e^{-x} + 8e^{2x} - 3e^{-3x}$

Exercice n°4

a. Pour tout réel x : $e^x > 0$ et $x^2 + 4 > 0$ donc $f(x) > 0$ pour tout réel x .

b. Pour tout réel x : $e^{-4x} > 0$. De plus, $x^4 \geq 0$ donc $-x^4 - 7 < 0$. Par quotient, $f(x) < 0$.

c. Pour tout réel x , $e^{2x} > 0$ donc $1 + e^{2x} > 0$. De même, $e^{-3x} > 0$ donc $e^{-3x} + 4 > 0$. Ainsi, $f(x) > 0$ pour tout réel x .

- d. Pour tout réel x , $e^x > 0$. On doit donc étudier le signe de $x^2 - x - 6$.
 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$. Puisque $\Delta > 0$ ce polynôme admet deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -2$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 3$$

Ainsi, $x^2 - x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$ et donc $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$.

> Résolution d'équations et d'inéquations

Exercice n°5

a. $e^x = e^{42}$

$$\Leftrightarrow x = 42$$

b. $e^x - e^{-8} = 0$

$$\Leftrightarrow e^x = e^{-8}$$

$$\Leftrightarrow x = -8$$

c. $e^x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

d. $\forall x \in \mathbb{R} e^x > 0$

Donc l'équation

$e^x = 0$ n'admet

aucune solution réelle.

e. $e^x - 2e^x = 0$

$\Leftrightarrow -e^x = 0$. Cette équation n'admet aucune solution réelle car $e^x > 0$ pour tout réel x .

f. $e^{2x+4} = e^7$

$$\Leftrightarrow 2x + 4 = 7$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

g. $e^{-3x+5} = 1$

$$\Leftrightarrow e^{-3x+5} = e^0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

h. $e^x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = -5$ Cette équation n'admet aucune solution réelle car $e^x > 0$ pour tout réel x .

Exercice n°6

a. $e^x - 5xe^x = 0$

$$\Leftrightarrow e^x(1 - 5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 5x = 0 \text{ car } e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

b. $4xe^x + 3xe^{x+4} = 0$

$$\Leftrightarrow 4xe^x + 3e^4e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x(4x + 3e^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3e^4 = 0 \text{ car } e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3e^4}{4}$$

c. $e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e = 0$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - e^xe^1 + e = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x(1 + e) + e = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - (1 + e)X + e = 0 \text{ en posant } X = e^x$$

$\Delta = (-(1 + e))^2 - 4 \times 1 \times e = (e - 1)^2 > 0$. L'équation admet donc deux solutions réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-(-1 + e) - \sqrt{(e - 1)^2}}{2 \times 1 = 1} \text{ et } X_2 = \frac{-(-1 + e) + \sqrt{(e - 1)^2}}{2 \times 1 = e}$$

Puisque $X = e^x$ alors les solutions sont $e^x = 1$ et $e^x = e$ autrement dit $x = 0$ et $x = 1$.

d. $e^{x^2-3x} - e^8 = 0$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-3x} = e^8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 8 = 0$$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 41 > 0$. L'équation admet donc deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{41}}{2 \times 1} = \frac{3 - \sqrt{41}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{41}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{41}}{2}$$

Exercice n°7

a. $e^x > e^4$

$$\Leftrightarrow x > 4$$

$$S =]4; +\infty[$$

b. $e^{-2x} > 1$

$$\Leftrightarrow e^{-2x} > e^0$$

$$\Leftrightarrow -2x > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

$$S =]-\infty; 0[$$

c. $e^{2x} < e^6$

$$\Leftrightarrow 2x < 6$$

$$\Leftrightarrow x < 3$$

$$S =]-\infty; 3[$$

d. $e^{3x+4} \leq e^{13}$

$$\Leftrightarrow 3x + 4 \leq 13$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{11}{3}$$

$$S = \left] -\infty; \frac{11}{3} \right]$$

e. $e^{6x-3} \geq e^{6x+1}$

$$\Leftrightarrow 6x - 3 \geq 6x + 1$$

$$\Leftrightarrow -3 \geq 1$$

Ce qui est impossible. Il n'y a donc aucune solution.

f. $e^{-3x+1} > e^{-4x+5}$

$$\Leftrightarrow -3x + 1 > -4x + 5$$

$$\Leftrightarrow x > 4$$

$$S =]4; +\infty[$$

> Suite géométrique et fonction exponentielle

Exercice n°8

1. $u_0 = e^{2 \times 0} = 1$, $u_1 = e^{2 \times 1} = e^2$ et $u_2 = e^{2 \times 2} = e^4$.

2. $\frac{u_n}{u_n} = \frac{e^{2(n+1)}}{e^{2n}} = \frac{e^{2n} \times e^2}{e^{2n}} = e^2$. Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison e^2 .

3. La fonction qui à x associe e^x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La suite (u_n) est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice n°9

1. $u_0 = e^{5 \times 0} = 1$, $u_1 = e^{5 \times 1} = e^5$ et $u_2 = e^{5 \times 2} = e^{10}$.
2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{5(n+1)}}{e^{5n}} = \frac{e^{5n} \times e^5}{e^{5n}} = e^5$. Il s'agit donc d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison e^5 .
3. La fonction qui à x associe e^x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La suite (u_n) est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice n°10

1. $u_0 = 40$, $u_1 = 40 \times 0,9 = 36$ et $u_2 = 36 \times 0,9 = 32,4$.
Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n \times 0,9$. Il s'agit donc d'une suite géométrique de premier terme 40 et de raison 0,9.
2. $u_n = 40 \times 0,9^n = 40 \times e^{-0,105n}$.
3. Cette suite suit une croissance exponentielle.

Exercice n°11

1. $4500 \times 1,03 = 4635$. En 2024, Jean-Kevin aura 4 635€ sur son livret.
2. $u_{n+1} = u_n \times 1,03$. C'est une suite géométrique de premier terme 4 500 et de raison 1,03.
On a donc pour tout entier naturel n : $u_n = 4500 \times 1,03^n$.
3. $u_n = 4500 \times e^{0,03n}$.
4. On souhaite que $u_n > 10\,000$. Ce qui est équivalent à :

$$4500 \times e^{0,03n} > 10000$$

$$\Leftrightarrow e^{0,03n} > \frac{20}{9}$$

$$\Leftrightarrow e^{0,03n} > e^{0,789}$$

$$\Leftrightarrow 0,03n > 0,789$$

$$\Leftrightarrow n > 26,6. \text{ Ce sera donc à partir de la 27}^{\text{ème}} \text{ année.}$$