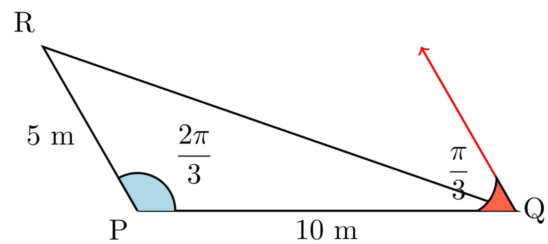
Correction des exercices sur le produit sacalire (1)

> Utiliser la formule

Exercice n°1



1. $\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{PR} = \|\overrightarrow{QP}\| \times \|\overrightarrow{PR}\| \times \cos(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{PR})$

$$= 10 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 25$$

2. $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PR} = \|\overrightarrow{PQ}\| \times \|\overrightarrow{PR}\| \times \cos(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$

$$= 10 \times 5 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -25$$

Exercice n°2

a. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$

$$= 5\sqrt{3} \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0$$

Pour trouver AC, on trouve AO en utilisant le théorème de Pythagore dans ADO rectangle en O.

b. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| \times \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$

$$= 5 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 12,5$$

L'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$ vaut $\frac{\pi}{3}$ puisque BAD est équilatéral.

c. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$

$$= 5 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 12,5$$

d. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})$

$$= 5\sqrt{3} \times 5 \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= -37,5$$

Exercice n°3

a. $$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} &= \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})\\ &= 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= 4,5\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})\\ &= 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -4,5\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} &= \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{CA}\| \times \cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA})\\ &= 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -4,5\end{aligned}$$

Exercice n°4

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6\sqrt{3}$.
2. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \sqrt{3} \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Exercice n°5

a. $$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.(2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) &= 2\overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\\ &= 2 \times 3^3 - (-6)\\ &= 24\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}(5\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v} &= 5\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{v}\\ &= 5 \times (-6) + 3 \times 4^2\\ &= 18\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u})^2 &= \overrightarrow{v}^2 + 2\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}^2\\ &= 4^2 + 2 \times (-6) + 3^2\\ &= 13\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}(3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v})^2 &= (3\overrightarrow{u})^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + (2\overrightarrow{v})^2\\ &= 9 \times 3^2 - 12 \times (-6) + 4 \times 4^2\\ &= 217\end{aligned}$$

Exercice n°6

a. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = 2^2 - 3^2 = -5$

b. $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2^2 + (-2) = 2$

c. $-2\overrightarrow{v}(3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = -2 \times 3\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}^2 = -6 \times (-2) + 2 \times 3^2 = 30$

> Déterminer une longueur, un angle, grâce au produit scalaire

Exercice n°7

1. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$

   $\Leftrightarrow 12 = 8 \times 4 \times \cos(\widehat{ACB})$

   $\Leftrightarrow \cos(\widehat{ACB}) = \frac{3}{8}$

   $\Leftrightarrow \widehat{ACB} = \arccos\left(\frac{3}{8}\right) \approx 68°$

   xs

2. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$

   $\Leftrightarrow -6 = 5 \times 8 \times \cos(\widehat{ACB})$

   $\Leftrightarrow \cos(\widehat{ACB}) = -\frac{3}{20}$

   $\Leftrightarrow \widehat{ACB} = \arccos\left(-\frac{3}{20}\right) \approx 99°$

Exercice n°8

1. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

   $\Leftrightarrow 5^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos(\widehat{BAC})$

   $\Leftrightarrow 25 = 100 - 96\cos(\widehat{BAC})$

   $\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{75}{96}$

   $\Leftrightarrow \widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{75}{96}\right) \approx 39°$

   $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$

   $\Leftrightarrow 6^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos(\widehat{ABC})$

   $\Leftrightarrow 36 = 89 - 80\cos(\widehat{ABC})$

   $\Leftrightarrow \cos(\widehat{ABC}) = \frac{53}{80}$

   $\Leftrightarrow \widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{53}{80}\right) \approx 49°$

   La somme des angles d'un triangle étant égale à 180° : $\widehat{BCA} = 180 - 39 - 49 = 92$.

2. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

   $\Leftrightarrow BC^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

   $\Leftrightarrow BC^2 = 49$

   BC étant une longueur, donc une grandeur positive : $BC = \sqrt{49} = 7$.

3. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$

   $\Leftrightarrow 5^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7 \times \cos(\widehat{ABC})$

   $\Leftrightarrow 25 = 113 - 112\cos(\widehat{ABC})$

   $\Leftrightarrow \cos(\widehat{ABC}) = \frac{88}{112}$

   $\Leftrightarrow \widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{88}{112}\right) \approx 38°$

Exercice n°9

1. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

   $\Leftrightarrow 5^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7 \times \cos(\widehat{BAC})$

   $\Leftrightarrow 25 = 113 - 112\cos(\widehat{BAC})$

   $\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{88}{112}$

   $\Leftrightarrow \widehat{BAC} = \arccos\left(\dfrac{88}{112}\right) \approx 38°$

2. On se place dans le triangle ABD.
   $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD})$

   $\Leftrightarrow BD^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \times 7 \times 5 \times \cos(76)$

   $\Leftrightarrow BD^2 \approx 57$

   Puisque BD est une longueur, donc une grandeur positive : $BD = \sqrt{57} \approx 7,5$.

3. L'aire de ABCD est le double de celle de ABC.
   On note H le pied de la hauteur issue de B dans ce triangle. L'aire de ABC est donc $\dfrac{AC \times AH}{2}$ donc l'aire de ABCD est $AC \times BH$.
   $AC = 8$. Il nous manque la valeur de BH.
   Puisque le triangle ABH est rectangle en H : $\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{BH}{BA}$ ou encore $BH = BA \times \sin(\widehat{BAC})$.

   Or $\sin(\widehat{BAC})^2 + \cos(\widehat{BAC})^2 = 1$ donc $\sin(\widehat{BAC}) = \sqrt{1 - \cos(\widehat{BAC})^2} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{11}{14}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$, car $\sin(\widehat{BAC}) > 0$.

   Donc l'aire de ABCD est donnée par : $AC \times BH = 8 \times 7 \times \dfrac{5\sqrt{3}}{14} = 20\sqrt{3} \approx 34,64$.

Exercice n°10

Pour utiliser le théorème d'Al-Kashi dans le triangle AOB on doit d'abord trouver les longueurs de BO at AO.

<u>Calcul de BO</u> : On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle BDO.

$BO = \sqrt{BD^2 + DO^2} = \sqrt{9^2 + 18^2} \approx 20,12$

<u>Calcul de AO</u> : $AD = AB + BD = 7{,}32 + 9 = 16{,}32$

On utilise ensuite le théorème de Pythagore dans le triangle ADO : $AO = \sqrt{AD^2 + DO^2} = \sqrt{16,32^2 + 18^2} \approx 24,3$

<u>Calcul de l'angle $\widehat{BOA}$</u>

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2 \times AO \times OB \times \cos(\widehat{BOA})$

$\Leftrightarrow 16,32^2 = 24,3^2 + 20,12^2 - 2 \times 24,3 \times 20,12 \times \cos(\widehat{BOA})$

$\Leftrightarrow 266,3424 = 995,3044 - 977,832\cos(\widehat{BOA})$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BOA}) = \dfrac{728,962}{977,832} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{BOA} = \arccos\left(\dfrac{728,962}{977,832}\right) \approx 42°$