

Les matrices : Applications

1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Propriété

On considère le système linéaire (S) à n inconnues ci-dessous :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

L'écriture matricielle du système linéaire (S) est donc $AX = B$.

Si A est inversible, alors le système (S) admet une unique solution $X = A^{-1}B$.

Exemple

On souhaite résoudre le système : $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 5 \times 3 - 4 \times 2 = 7 \neq 0$. La matrice A est inversible ce qui signifie que le système admet une solution.

On calcule l'inverse de A et on trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Le système a donc pour solution $(x; y) = (2; 3)$.

2 Suite de matrices colonnes

Définition

Soit n un entier naturel.

On appelle **suite de matrices colonnes** une suite de matrices (U_n) dont les coefficients sont les termes d'une suite numérique.

Exemples

- La suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \begin{pmatrix} n-1 \\ n^2+6n \\ 6n-8 \end{pmatrix}$ est une suite de matrices colonnes.

Les coefficients de cette suite de matrices colonnes sont les termes des suites numériques (u_n) , (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n = n-1$, $v_n = n^2+6n$ et $w_n = 6n-8$.

- On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$, $v_0 = 4$
et $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 1 \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n - 4 \end{cases}$

Pour tout entier naturel n , on pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On a alors $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une relation matricielle de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$.

Propriété

Soit p un entier naturel non nul.

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille p et soit A une matrice carrée d'ordre p telles que pour tout entier naturel n , on a $U_{n+1} = AU_n$.

Pour tout entier naturel n , on a alors :

$$U_n = A^n U_0$$

Définition

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille p .

On dit que (U_n) est **convergente** si les p suites dont les termes sont les p coefficients de (U_n) sont convergentes.

Exemples

- La suite de matrices colonnes (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \begin{pmatrix} n^2 - 1 \\ 6n + 2 \end{pmatrix}$ est divergente puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n + 2 = +\infty$.
- En revanche, la suite de matrices colonne (V_n) définie pour tout entier naturel $U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^2} \\ \frac{5n^2 - 3}{n^2 + 1} \end{pmatrix}$ est convergente et sa matrice limite est $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Propriété

On considère une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p définie par $U_{n+1} = AU_n + B$ où A est une matrice carrée d'ordre p et B est une matrice colonne à p lignes.

Si la suite (U_n) est convergente alors sa limite U est une matrice colonne telle que $U = AU + B$.

3 Ecriture matricielle d'un système linéaire**Définition**

On appelle **transformation du plan** une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui à tout point M du plan associe un point M' tel que $f(M) = M'$.

Exemples

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $M(x; y)$ un point du plan et $M'(x'; y')$ son image par la transformation du plan f .

- Si f est la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Si f est la rotation de centre O et d'angle θ alors $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Si f est l'homothétie de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ alors $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.