Interpolation polynomiale

Principe

On se donne une liste de points $\mathrm{A}_1(x_1\,;\,y_1)$, $\mathrm{A}_2(x_2\,;\,y_2)$, ..., $\mathrm{A}_n(x_n\,;\,y_n)$.
On cherche une fonction polynomiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré n dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ passe par les n points précédents.
On va donc pour cela résoudre un système d'équations dont les n inconnues sont les coefficients a_i, i étant un entier de 1 à n. Pour nous aider à réaliser cela, on utilisera le calcul matriciel pour résoudre ce système linéaire.

Exercice n°1

Un professeur de maths de collège cherche à tracer une courbe représentative d'une fonction f polynôme de degré 4 pour entrainer ses élèves. Il souhaite que cette courbe représentative passe par les points $\mathrm{A}(-2\,;\,2)$, $\mathrm{B}(-1\,;\,-1)$, $\mathrm{C}(2\,;\,3)$ et $\mathrm{D}(3\,;\,1)$.

1. Ecrire les quatre équations correspondant à ce problème.
2. Traduire ce problème par une équation à l'aide de matrice.
3. Trouver l'expression de la fonction f.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels.
   Puisque A appartient à la courbe représentative de la fonction f, on a $f(-2) = 2$ ce qui revient à $-8a + 4b - 2c + d = 2$.
   Puisque B appartient à la courbe représentative de la fonction f, on a $f(-1) = -1$ ce qui revient à $-a + b - c + d = -1$.
   Puisque C appartient à la courbe représentative de la fonction f, on a $f(2) = 3$ ce qui revient à $8a + 4b + 2c + d = 3$.
   Puisque D appartient à la courbe représentative de la fonction f, on a $f(3) = 1$ ce qui revient à $27a + 9b + 3c + d = 1$.
   Le système à résoudre est donc :
$$\left\{\begin{array}{rcr} -8a + 4b - 2c + d & = & 2 \\ -a + b - c + d & = & -1 \\ 8a + 4b + 2c + d & = & 3 \\ 27a + 9b + 3c + d & = & 1 \end{array}\right.$$

2. On pose $A = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

   Le problème revient ainsi à résoudre :
$$AX = B$$

3. On doit déterminer la matrice inverse A^{-1} de A. A l'aide de la calculatrice, on trouve :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{20} & \dfrac{1}{12} & -\dfrac{-1}{12} & \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{1}{5} & -\dfrac{1}{4} & 0 & \dfrac{1}{20} \\ -\dfrac{1}{20} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{7}{12} & -\dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{3}{10} & 1 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{5} \end{pmatrix}$$
   Ainsi, $AX = B$ est équivalent à $X = A^{-1}B$. Cela donne :
$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{20} \times 2 + \dfrac{1}{12} \times (-1) + \left(-\dfrac{1}{12}\right) \times 3 + \dfrac{1}{20} \times 1 \\ \dfrac{1}{5} \times 2 + \left(-\dfrac{1}{4} \times (-1) + 0 \times 3 + \dfrac{1}{20} \times 1\right) \\ -\dfrac{1}{20} \times 2 + \left(-\dfrac{1}{3}\right) \times (-1) + \dfrac{7}{12} \times 3 + \left(-\dfrac{1}{5}\right) \times 1 \\ -\dfrac{3}{10} \times 2 + 1 \times (-1) + \dfrac{1}{2} \times 3 + \left(-\dfrac{1}{5}\right) \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi $a = -\dfrac{23}{60}$, $b = \dfrac{7}{10}$, $c = \dfrac{107}{60}$ et $d = \dfrac{-3}{10}$.

La fonction polynomiale recherchée par le professeur est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{23}{60}x^3 + \frac{7}{10}x^2 + \frac{107}{60}x - \frac{3}{10}$$