Utilisation des nombres complexes en géométrie

1 Rappels sur les modules et les arguments

Propriétés

On considère deux points M et N d'affixes respectives z_M et z_N.
On considère également deux vecteurs du plan $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$. On se donne k un réel.

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ a pour affixe $z_N - z_M$.
- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe $z+z'$.
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour affixe kz.
- Le milieu du segment [MN] a pour affixe $\dfrac{z_M+z_N}{2}$.

Propriétés du module

Soient z et z' deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Produit du module : $|zz'| = |z| \times |z'|$

Puissance : $|z^n| = |z|^n$

Inverse : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

Quotient : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Propriétés de l'argument

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\arg(z^n) = n\arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

2 Utilisation des nombres complexes en géométrie

Propriétés

On se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.
On considère trois points A, B et C dont les affixes respectives sont a, b et c.

- La distance AB est égale à $|b-a|$.
- L'angle orienté $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}})$ est égal à $\arg(b-a)$.
- L'angle orienté $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)$.

Propriétés : alignement et parallélisme

Soient $\mathrm{A}(z_A)$, $\mathrm{B}(z_B)$, $\mathrm{C}(z_C)$ et $\mathrm{D}(z_D)$ quatre points distincts deux à deux.

- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est un réel.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ est un réel.

Démonstration

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires si et seulement si l'angle orienté $(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 0\ [\pi]$.
On en déduit donc que $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = 0\ [\pi]$.

Le raisonnement est analogue pour montrer la deuxième propriété.

Propriétés : orthogonalité

Soient $\mathrm{A}(z_A)$, $\mathrm{B}(z_B)$, $\mathrm{C}(z_C)$ et $\mathrm{D}(z_D)$ quatre points distincts deux à deux.

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ si et seulement si $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A} = ki$ où k est un réel.

Démonstration

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{CD}}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
On en déduit que $\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et donc que $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A} = ki$ où k est un réel.

3 Racine n-ième de l'unité

Définition

On considère l'équation $z^n = 1$ où z est un nombre complexe et où n est un entier naturel non nul.
Les solutions de cette équation sont appelées **racine n-ième de l'unité**.

Théorème

$\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines n-ième de l'unité. Cet ensemble comporte exactement n éléments qui sont de la forme :

$$e^{i\dfrac{2k\pi}{n}}$$

où k est un entier compris entre 0 et $n-1$.

Démonstration

- Montrons l'existence d'une solution.

  Si $z^n = 1$ alors $|z|^n = |z^n| = 1$ et donc $|z| = 1$.
  Les solutions sont donc de la forme $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0\,;\,2\pi[$.

  $z^n = 1 \Leftrightarrow (e^{i\theta})^n = 1 \Leftrightarrow e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow n\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$.

  Il suffit de ne garder que les valeurs entières de k entre 0 et $n-1$.

- Montrons l'unicité des solutions.
  Supposons qu'il existe un autre entier k' compris entre 0 et $n-1$ tel que $w_k = w_{k'}$.
  On a alors $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$ ce qui revient à dire que $\frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} + 2l\pi$ avec $l \in \mathbb{Z}$.
  Ce qui revient finalement)à $2k\pi = 2k'\pi + 2ln\pi$ donc à $k - k' = ln$.

  Cela signifie que n divise $k-k'$. Or $k-k'$ est un entier compris entre 0 et $n-1$. Il est donc impossible que n divise $k-k'$.
  Ainsi, $l = 0$ et donc $k = k'$.

Exemple

En utilisant le précédent théorème, on obtient :

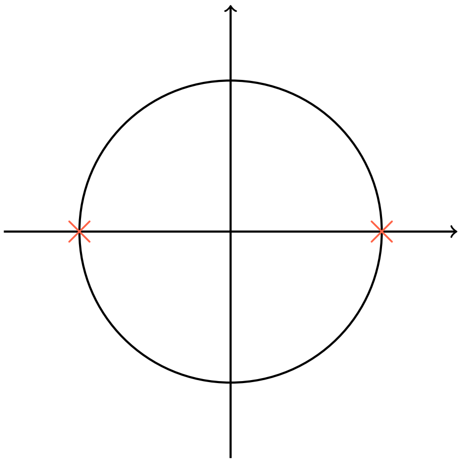
$\mathbb{U}_2 = \{1\,;\,e^{i\pi}\} = \{1\,;\,-1\}$

$\mathbb{U}_3 = \{1\,;\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\,;\,e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$

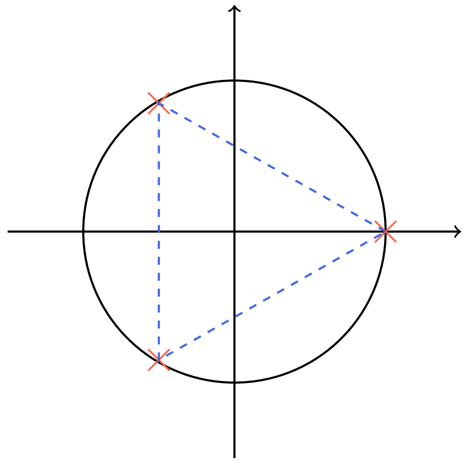
$\mathbb{U}_4 = \{1\,;\,e^{i\frac{\pi}{2}}\,;\,e^{i\pi}\,;\,e^{i\frac{3\pi}{2}}\} = \{1\,;\,i\,;\,-1\,;\,-i\}$

Exemple : suite et fin

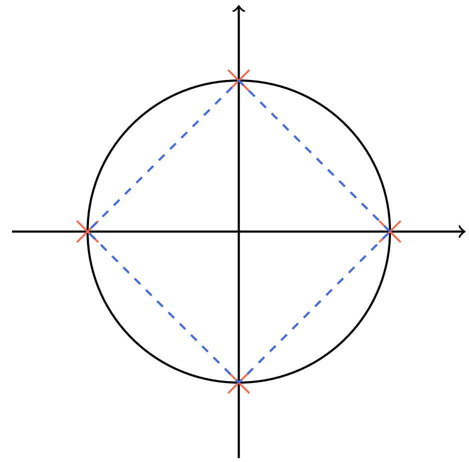
Si on représente les solutions dans un repère orthonormé, on obtient des polygones réguliers.



$\mathbb{U}_2$



$\mathbb{U}_3$



$\mathbb{U}_4$