Intégration - Partie 2

1 Propriétés des intégrales

Propriété

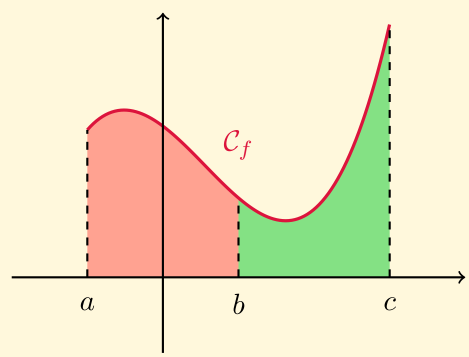
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout a et b dans I :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour tout a, b et c dans I :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$



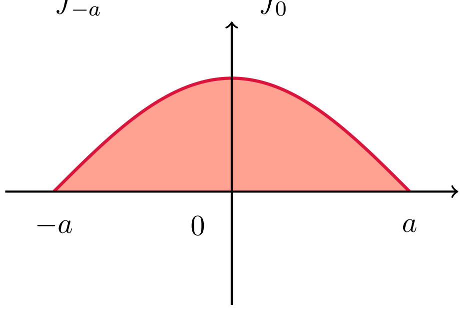
Démonstration

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarques

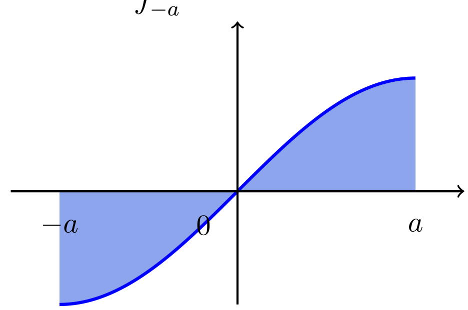
Si f est une fonction paire alors

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Si f est une fonction impaire alors

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$



Propriété : Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I.
Pour tout α et β de $\mathbb{R}$:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple

On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x) + \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

Propriété : positivité

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ de $\mathbb{R}$.

Si pour tout x de I, $f(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Propriété : intégration des inégalités

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ de $\mathbb{R}$.

Si pour tout x de I, $f(x) \leqslant g(x)$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple

On souhaite déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $x^2 \leqslant x$.

La fonction $x \mapsto e^x$ étant positive et croissante sur cet intervalle on a $0 \leqslant e^{x^2} \leqslant e^x$.

Par intégration, on a alors : $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$. Ce qui nous donne :

$$0 \leqslant \int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant e - 1$$

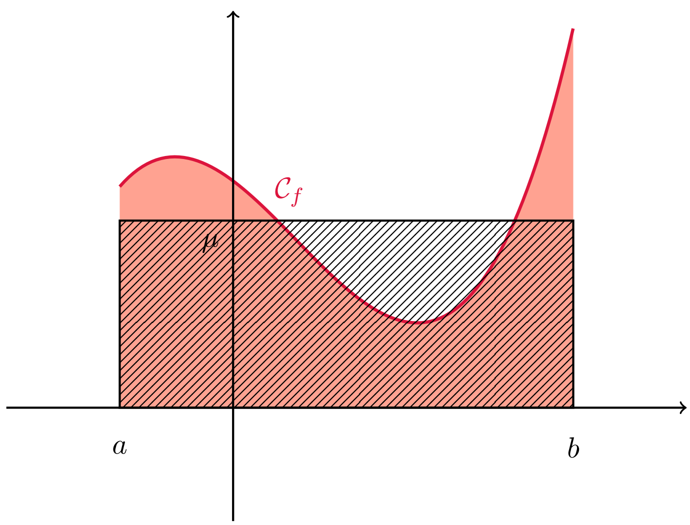
Définition : valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ de $\mathbb{R}$.
On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a\,;\,b]$ le réel noté μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation graphique

Le produit de μ et de $(b-a)$ est l'aire du rectangle de longueur $b-a$ et de hauteur μ qui est aussi égale à l'intégrale de f entre a et b.



Exemple

On souhaite calculer la valeur moyenne de la fonction sinus sur $[0\,;\,\pi]$.

$$\mu = \frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(x)\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

2 Intégration par parties

Théorème : intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;\,b]$. On a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration

Si u et v sont dérivables sur $[a\,;\,b]$ alors la fonction $x \mapsto u(x)v(x)$ est aussi dérivable et :
$(uv)' = u'v + uv'$ ce qui revient à $u'v = (uv)' - uv'$. Les fonctions u et v sont dérivables donc continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, on peut donc écrire :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x) - u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Et par linéarité de l'intégrale on obtient :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Et donc :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple

On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$. On ne peut pas trouver une primitive de la fonction $x \mapsto xe^x$ en utilisant la formule $u'e^u$.
On va donc utiliser une intégration par parties en posant $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. On a donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$.
Ainsi :

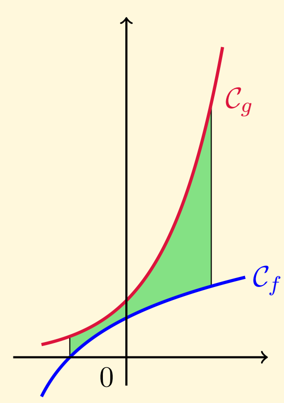
$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = 1e^1 - 0e^0 - [e^x]_0^1 = 1$$

3 Aire entre deux courbes

Propriété : aire entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$ telles que pour tout $x \in [a\,;\,b]$ on ait $f(x) \leqslant g(x)$.
L'aire entre les courbes représentatives de f et g comprise entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est :

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$



Exemple

On considère les fonctions f et g définies sur $[-1\,;\,2]$ par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.

On admet que pour tout x dans $[-1\,;\,2]$, $f(x) \leqslant g(x)$.

On souhaite déterminer l'aire entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

$g(x) - f(x) = -x^2 + 2x + 5 - (x^2 + 1) = -2x^2 + 2x + 4$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} \\ &= 9\end{aligned}$$