Continuité des fonctions : approfondissement

Prolongement par continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$.
Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Il existe une fonction g définie sur I par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Cette fonction g est le **prolongement par continuité** de f en x_0.

Exercice n°1

Donner le prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Exercice n°2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x+2}$.

1. Sachant que -2 est une racine de x^3+8, factoriser le polynôme x^3+8.
2. Montrer que l'on peut prolonger par continuité f en -2.

> Correction des exercices

Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.
Cette fonction f n'est pas définie en 0 mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Posons alors g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice n°2

1. $x^3 + 8 = (x+2)(ax^2 + bx + c)$.
   Par identification, on trouve $a = 1$, $b = -2$ et $c = 4$.
   On a donc $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$.

2. $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x+2} = \dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = x^2 - 2x + 4$.

   Donc $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} x^2 - 2x + 4 = 12$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en -2 en posant $f(-2) = 12$.