Suites numériques : approfondissement

Somme des premiers cubes entiers

Soit n un entier naturel non nul. La somme des n premiers cubes est :

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Démonstration

Posons $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$, $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ et $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.

On sait que $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. On a donc $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$.

Pour $k = 2$, cela donne : $2^4 - 1^4 = 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1$
Pour $k = 3$, cela donne : $3^4 - 2^4 = 4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1$
Pour $k = 4$, cela donne : $4^4 - 3^4 = 4 \times 3^3 + 6 \times 3^2 + 4 \times 3 + 1$
...
Pour $k = n$, cela donne : $(n+1)^4 - n^4 = 4 \times n^3 + 6 \times n^2 + 4 \times n + 1$.

En additionnant membre à membre chacune de ces égalités on trouve :

$(n+1)^4 - 1^4 = 4 \times (1^3 + 2^3 + ... + n^3) + 6 \times (1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 4 \times (1 + 2 + ... + n) + n$

Ce qui est équivalent à $(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$ ou encore, en isolant ce que l'on cherche :

$4S_3 = (n+1)^4 - 1 - 6S_2 - 4S_1 - n$.

Puis, en remplaçant S_2 et S_1 par leur expression on trouve : $4S_3 = (n+1)^4 - 1 - 6 \times \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \times \dfrac{n(n+1)}{2} - n$.

Après avoir tout développé puis simplifié, cela donne $4S_3 = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n+1)^2$.

On obtient donc bien $S_3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice d'application

1. Déterminer $1 + 8 + 27 + ... + 1331$.
2. Déterminer $7^3 + 8^3 + 9^3 + ... + 15^3$.

Correction

1. On applique la formule en posant $n = 11$. On obtient $S = \dfrac{11^2 \times 12^2}{4} = 4356$.

2. On calcule $S = 1^3 + 2^3 + ... + 15^3$ puis on enlèvera $S' = 1^3 + 2^3 + ... + 6^3$.

   $S = \dfrac{15^2 \times 16^2}{4} = 14400$ et $S' = \dfrac{6^2 \times 7^2}{4} = 441$. Donc la somme cherchée vaut $14\ 400 - 441$ soit $13\ 959$.