Exercices sur les limites de fonctions

> Déterminer des limites de fonctions usuelles

Exercice n°1 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction :

a. f définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$

b. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2x$

c. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x^2 + 3x$

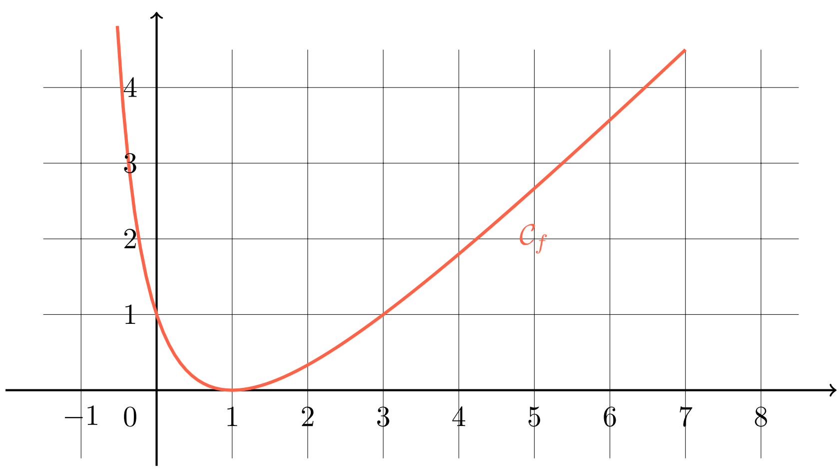
Exercice n°2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition. Faire apparaître les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que la fonction f est bornée.

Exercice n°3

On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f.

1. Quelles semblent être les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$?
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.



> Opérations sur les limites

Exercice n°4

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On considère la fonction g définie pour tout réel x différent de 1 par $g(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
   Déterminer les limites à droite et à gauche de g en 1.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x}{x+2}$.

Exercice n°5

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1-2x}{x-3}$.

> Lever des indéterminations

Exercice n°6 Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 + 2x^2 - 6x + 1$.

Exercice n°7 Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+2}{4x-1}$.

Exercice n°8 Déterminer $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

> Composition de fonctions

Exercice n°9 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+5}{4x+1}}$ **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}$ **c.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2-\dfrac{1}{x}}$

Exercice n°10 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} x + e^{-3x}$ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$

> Utiliser les théorèmes de comparaison, d'encadrement et de croissance comparée

Exercice n°11 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sin(x)$ **a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\cos(x)}{x^2+1}$

Exercice n°12

1. Montrer que pour tout réel x : $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\cos(x)} \leqslant 1$.
2. En déduire les limites suivantes :

   a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2-\cos(x)}$ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+\cos(x)}{2-\cos(x)}$

Exercice n°13 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 3x}{x^3}$ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 4x - 1)e^x$ **c.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + x}{e^x - x^2}$

> Problèmes de synthèse

Exercice n°14 Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de f en -1. Que peut-on en déduire concernant la courbe représentative de f ?
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + 1$. On pose pour tout réel $x > -1$: $d(x) = f(x) - (x + 1)$.
   Déterminer la limite de d en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$?
4. Etudier le signe de d sur $]-1\,;\,+\infty[$. Que peut-on en déduire quand à la position des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$?

Exercice n°15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^3 - 1}$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -2x^3 - 3x^2 - 1$.
   On admet qu'il existe une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $P(x) = 0$ et que $\alpha \approx -1,68$.
2. Etudier les variations de f.

Exercice n°16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\,;\,1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4}{x^2 - 1}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale.
2. Etudier sa position relative par rapport à cette asymptote.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.
4. Que peut-on en déduire ?
5. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.