Nombre complexe et trigonométrie

1 Formules de trigonométrie

Propriété : formules d'addition

Soient a et b deux nombres réels.

- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

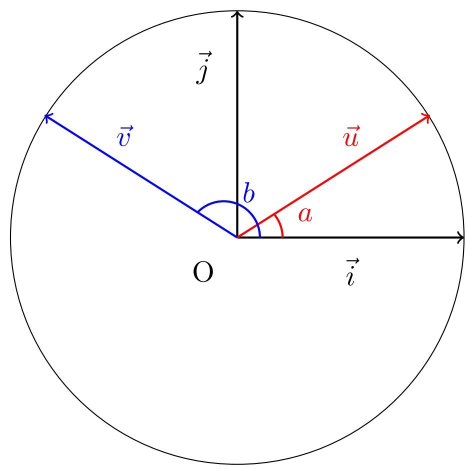
Démonstration

On se place dans le cercle trigonométrique de centre O.
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de norme 1 tels que $(\vec{i}); \vec{u} = a$ et $(\vec{i}; \vec{v}) = b$.

De ce fait, $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$.

On a d'une part, $\vec{u}.\vec{v} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
On a d'autre part : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(a-b)$.

Ainsi, $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.



Pour la seconde formule, $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Pour la troisième formule, $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right)$

$$\begin{aligned} &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b) \\ &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b). \end{aligned}$$

Pour la dernière formule, $\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin(a)\cos(-b) - \cos(a)\sin(-b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Propriété : formules de duplication

Soit a un nombre réel.

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$.

2 Formule exponentielle d'un nombre complexe

Remarque

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

$$\begin{aligned} f(\theta)f(\theta') &= \cos(\theta) + i\sin(\theta)\cos(\theta') + i\sin(\theta') \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') + i\cos(\theta)\sin(\theta') + i\sin(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')) \\ &= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') \\ &= f(\theta)f(\theta'). \end{aligned}$$

Les seules fonctions solutions sont celles de la forme $f(x) = e^{kx}$. Si on étend la fonction exponentielle à $\mathbb{C}$, on peut alors poser $f(\theta) = e^{k\theta}$ avec $k \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Or $f'(\theta) = if(\theta)$ donc $k = i$.

On a donc finalement $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.
L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelé la **forme exponentielle** du nombre complexe de z où :

$$r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z)\ (2\pi)$$

Exemple

Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$.

On a $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Puis $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \arg(z) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

On a donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Propriété

$$e^{i\pi} = -1$$

Démonstration

$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i \times 0 = -1$

Remarque

C'est à Leonard Euler que l'on doit l'expression $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Propriétés

Soient deux réels θ et θ'.

- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta'}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

3 Formule de Moivre et formules d'Euler

Propriété : formule de Moivre

Soit θ un réel et soit n un entier naturel.

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta} = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$$

Démonstration

Il suffit d'utiliser la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle : $e^{na} = (e^a)^n$.

Propriété : formules d'Euler

Soit θ un nombre réel.

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration

- $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)}{2} = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta)$
- $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(-\theta) - i\sin(-\theta)}{2i} = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2i} = \sin(\theta)$