Correction : suites numériques (1)

> Utiliser le raisonnement par récurrence

Exercice n°1

On souhaite montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

Initialisation

Pour $n = 1$: $u_0 = -2$ et $u_1 = 1 + \frac{1}{2} \times (-2) = 0$.
On a bien $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel $n \geqslant 1$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n \leqslant \frac{1}{2}u_{n+1} \leqslant 1$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n + 1 \leqslant \frac{1}{2}u_{n+1} + 1 \leqslant 1 + 1$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n \leqslant \frac{1}{2}u_{n+1} \leqslant 1$
$\Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$
La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 1$ et héréditaire pour un entier naturel $n \geqslant 1$. Elle est donc vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Exercice n°2

1. **Initialisation**

   Pour $n = 1$: $1^3 = 1$ et $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$.
   La proposition est donc vraie pour $n = 1$.

   Hérédité

   Supposons que pout un entier naturel $n \geqslant 1$, on ait $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   On souhaite montrer que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{n^4+2n^3+n^2+4n^3+12n^2+12n+4}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{n^4+7n^3+13n^2+12n+4}{4}$$

Or $(n+1)^2(n+2)^2=(n^2+2n+1)(n^2+4n+4)=n^4+4n^3+4n^2+2n^3+8n^2+8n+n^2+4n+4$
$=n^4+6n^3+13n^2+12n+4.$

Ainsi : $1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\dfrac{n^4+7n^3+13n^2+12n+4}{4}=\dfrac{(n+1)^2(n+1)^2}{4}$.

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n=1$ et héréditaire pour un entier naturel $n\geqslant 1$. Elle est donc vraie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

2. **Initialisation**

Pour $n=2$: $1!=1$ et $2!=2$. La proposition est donc vraie pour $n=2$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel $n\geqslant 2$, on ait $1!+2!+...+(n-1)!\leqslant n!$.

$\Leftrightarrow (1!+2!+...+(n-1)!)\times(n+1)\leqslant n!\times(n+1)$

$\Leftrightarrow (1!+2!+...+(n-1)!)\times(n+1)\leqslant (n+1)!$

$\Leftrightarrow n+2n+...+(n-2)!\times n+(n-1)!\times n+1!+2!+...+(n-1)!\leqslant (n+1)!$

$\Leftrightarrow n+2n+...+n!+1!+2!+...+(n-1)!\leqslant (n+1)!$

$\Leftrightarrow (1!+2!+...+(n-1)!+n!)+(n+2+...+(n-2)!\times n)\leqslant (n+1)!$

Les quantités étant positives, on a donc $1!+2!+...+n!\leqslant(n+1)!$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n=2$ et héréditaire pour un entier naturel $n\geqslant 2$. La proposition est donc vraie pout tout entier naturel n.

Exercice n°3

On souhaite montrer que pout tout entier naturel n on a $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

Initialisation

$u_1 = f(u_0) = -0,5 \times (-0,5)^2 + (-0,5) + 0,5 = -0,125$. La proposition est vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pout un entier $n \geqslant 0$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
La fonction f est une fonction polynôme du second degré : elle est croissante sur $]-\infty\,;1]$. Ainsi :
$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1) \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$.
La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et héréditaire pour un entier naturel $n \geqslant 0$. La proposition est donc vraie.

Exercice n°4

Initialisation

Pour $n = 1$: $x^n - 1 = x^1 - 1 = x - 1$ et $(x-1)(1 + x^{1-1}) = x - 1$
La proposition est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel $n \geqslant 1$, on ait $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})$.

$$\begin{aligned} x^{n+1} - 1 &= x^{n+1} - 1 - x^n + x^n \\ &= x^{n+1} - x^n + (x-1)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) \\ &= x^n(x-1) + (x-1)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) \\ &= (x-1)(1 + x + x^2 + ... + x^n) \end{aligned}$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 1$ et héréditaire pour un entier naturel $n \geqslant 1$.
La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice n°5

Initialisation

$u_1 = \dfrac{1}{3}u_0 + 4 = \dfrac{17}{3} < 7$ et $u_1 > u_0$. La proposition est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel $n \geqslant 0$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 7$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}u_n \leqslant \dfrac{1}{3}u_{n+1} \leqslant \dfrac{7}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}u_n + 4 \leqslant \dfrac{1}{3}u_{n+1} + 4 \leqslant \dfrac{7}{3} + 4$

$\Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{19}{3} < 7$.

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et héréditaire pour un entier $n \geqslant 0$.

La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice n°6

1. $u_1 = \dfrac{3u_0}{1+2u_0} = \dfrac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$; $u_2 = \dfrac{3u_1}{1+2u_1} = \dfrac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}} = \dfrac{9}{10}$.

2. **Initialisation**

   Pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$. La proposition est vraie pour $n = 0$.

   Hérédité

   Supposons que pour un entier naturel $n \geqslant 0$, $u_n > 0$.
   $1 + 2u_n > 0$ et $3u_n > 0$ donc $\dfrac{3u_n}{1+2u_n} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$. La proposition est héréditaire.

   Conclusion

   La proposition est vraie pour $n = 0$ et héréditaire pour un entier naturel $n \geqslant 0$. La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n.

3. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{u_n} = \dfrac{3}{1+2u_n}$.

   D'après l'énoncé :$u_n < 1$

   $\Leftrightarrow 1 + 2u_n < 3$

   $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2+u_n} > \dfrac{1}{3}$

   $\Leftrightarrow \dfrac{3}{1+2u_n} > 1$

   $\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. La suite (u_n) est donc croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice n°7

Initialisation

$u_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$. La proposition est vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel $n \geqslant 0$ on ait $u_n = (n+1)^2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2. \text{ La proposition est donc héréditaire.} \end{aligned}$$

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et héréditaire pour un entier naturel $n \geqslant 0$.
La proposition est donc vraie pout tout entier naturel n.

> Etudier la convergence d'une suite

Exercice n°8

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} = 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2-3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{-n^2-3} = 0$

Exercice n°9

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Programme Python de la rechercher de seuil :

```
def seuil(a):
    n=0
    u=0
    while u<a:
        n=n+1
        u=2*n*n+3*n+1
    return(n)
```

```
>>  print(seuil(1000000))
>>  707
```

Exercice n°10

1. Si on utilise les opérations sur les limites, on arrive à une forme indéterminée. On va donc chercher à factoriser.
   $3n^3 - 4n + 2 = n^3(3 - \dfrac{4}{n^2} + \dfrac{2}{n^3})$.
   $\lim n \to +\infty 3 - \dfrac{4}{n^2} + \dfrac{2}{n^3} = 3$ et $\lim n \to +\infty n^3 = +\infty$. Donc $\lim n \to +\infty = +\infty$.
2. Programme Python de la rechercher de seuil :

```python
def seuil(a):
    n=0
    u=0
    while u<a:
        n=n+1
        u=3*n*n*n-4*n+2
    return(n)
```

>> print(seuil(1000000))
>> 70.

3. Là encore, nous devons factoriser.

$$u_n = \frac{2n+3}{-n-5} = \frac{n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}{n\left(-1-\dfrac{5}{n}\right)} = \frac{2+\dfrac{3}{n}}{-1-\dfrac{5}{n}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{3}{n} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -1-\dfrac{5}{n} = -1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$

Exercice n°11

1. On factorise :

$$\begin{aligned} n-3\sqrt{n} &= n\left(1-\frac{3\sqrt{n}}{n}\right) \\ &= n\left(1-\frac{3\sqrt{n}\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right) \\ &= n\left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{3}{\sqrt{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$.

2. $n^2-5n+1 = n^2\left(1-\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. $\dfrac{3n^2+n}{n+3} = \dfrac{n^2\left(3+\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{1}{n} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. $\sqrt{n+2}-\sqrt{n} = \sqrt{n+2}-\sqrt{n} \times \dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$.

Le dénominateur tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0$.

Exercice n°12

1. $\dfrac{3n}{n^2+4} = \dfrac{n^2 \times \dfrac{3}{n}}{n^2\left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)} = \dfrac{\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{4}{n^2}}$.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{4}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0$. Puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{5}+7 = +\infty$.

   Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. $\dfrac{6n^2-3n+7}{n^2+n+1} = \dfrac{n^2\left(6-\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{6-\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} 6-\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2} = 6$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

3. $\dfrac{3n^2-1}{5n+4} = \dfrac{n^2\left(3-\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(5+\dfrac{4}{n}\right)} = \dfrac{n\left(3-\dfrac{1}{n^2}\right)}{5+\dfrac{4}{n}}$.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(3-\dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5+\dfrac{4}{n} = 5$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2-1}{5n+4} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. $u_n = n^2\left(\sqrt{3-\dfrac{2}{n}}-\sqrt{3}\right) \times \dfrac{\sqrt{3-\dfrac{2}{n}}+\sqrt{3}}{\sqrt{3-\dfrac{2}{n}}+\sqrt{3}} = \dfrac{-2n}{\sqrt{3-\dfrac{2}{n}}+\sqrt{3}}$.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-\dfrac{2}{n} = 3$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3-\dfrac{2}{n}}+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.