Correction : les polynômes du second degré (2)

> Résoudre une équation du second degré

Exercice n°1

a. $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 0$
Puisque $\Delta = 0$, l'équation n'a qu'une seule solution réelle : $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-12)}{2 \times 2} = 3$.

b. $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -10$
Puisque $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

c. $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 28$.
Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{28}}{2 \times 6} = -\frac{2 + \sqrt{7}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{28}}{2 \times 6} = \frac{-2 + \sqrt{7}}{6}$$

d. $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7$
Puisque $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Exercice n°2

a.
$$\begin{aligned} & x^2 + 5x + 3 = 2x + 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 3x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x+3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -3 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} & (2t+1)(t-4) = t^2 - 4t - 6 \\ \Leftrightarrow\ & 2t^2 - 8t + t - 4 = t^2 - 4t - 6 \\ \Leftrightarrow\ & 2t^2 - 7t - 4 = t^2 - 4t - 6 \\ \Leftrightarrow\ & t^2 - 3t + 2 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$.
Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$$

c. $(t+2)^2 = 2t^2 + 5t - 2$

$\Leftrightarrow \quad t^2 + 4t + 4 = 2t^2 + 5t - 2$

$\Leftrightarrow \quad -t^2 - t + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25.$
Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = -3$$

d. $(x+1)(x+2) = (x+3)(x+4)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 4x + 3x + 12$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 3x + 2 = x^2 + 7x + 12$

$\Leftrightarrow \quad 3x + 2 = 7x + 12$

$\Leftrightarrow \quad -4x = 10$

$\Leftrightarrow \quad x = -2,5$

Exercice n°3

a. Cela revient à résoudre l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$. Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\times 1} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\times 1} = 3.$$

Les coordonnées des points d'intersection sont donc $(1\,;0)$ et $(3\,;0)$.

b. Cela revient à résoudre l'équation $3x^2 + 2x + 3 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times 3 = -32$. Puisque $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$. La parabole $y = 3x^2 + 2x + 3$ n'a donc pas de points d'intersection avec l'axe des abscisses.

c. Cela revient à résoudre l'équation $x^2 + 2x = 0$

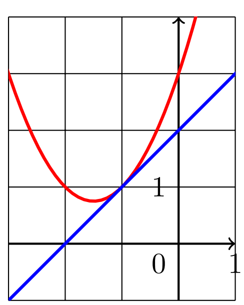
$\Leftrightarrow x(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2.$

Les coordonnées des points d'intersection sont donc $(0\,;0)$ et $(-2\,;0)$.

Exercice n°4

1. Voici la représentation graphique des deux fonctions.



2. Graphiquement, il semble que l'abscisse du point d'intersection soit -1 et que son ordonnée soit 1.
3. $x^2 + 3x + 3 = x + 2$

   $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

   $\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$

   $\Leftrightarrow x = -1$

   L'abscisse du points d'intersection des deux représentations graphiques est bien -1.
   Puis $(-1)^2 + 3 \times (-1) + 3 = 1$. Les point d'intersection a pour coordonnées $(-1\,;\,1)$.

Exercice n˚5

Aire du terrain de tennis : $23,77 \times 10,97 = 260,7569$.
Dimensions terrain + bande : $23,77 + 2x$ par $10,97 + 2x$.
Aire terrain + bande : $(23,77 + 2x)(10,97 + 2x) = 23,77 \times 10,97 + 23,77 \times 2x + 2x \times 10,97 + 2x \times 2x$

$$= 260,7569 + 47,54x + 21,94x + 4x^2$$

$$= 260,7569 + 69,48x + 4x^2.$$

On retranche l'aire du terrain de tennis pour n'avoir que l'aire de la bande et on obtient $4x^2 + 69,48x$.

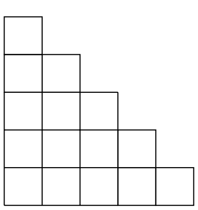
On souhaite que les deux aires soient égales donc : $4x^2 + 69,48x = 260,7569$
Ce qui est équivalent à $4x^2 + 69,48x - 260,7569 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 69,48^2 - 4 \times 4 \times 260,7569 = 8999,5808$. Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-69,48 - \sqrt{8999,5808}}{2 \times 4} \approx -20,54 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-69,48 + \sqrt{8999,5808}}{2 \times 4} \approx 3,173$$

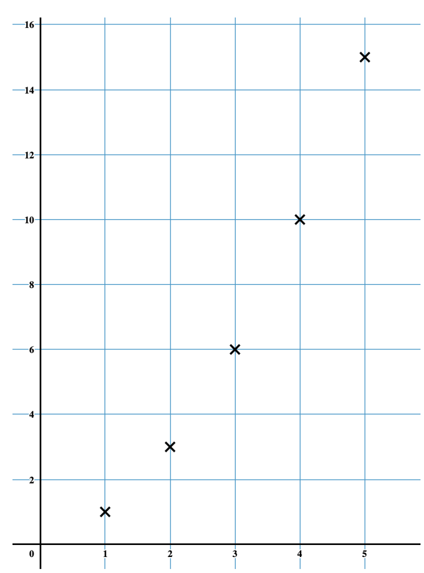
On cherche une longueur, on ne garde donc que la solution positive. La largeur de la bande doit donc être d'environ 3,173 m.

Exercice n˚6

1. On a $T_5 = 15$.



2. On ouvre le tableur dans Géogébra. On rentre les données du tableau puis on faire « Créer liste de points ». On obtient la figure ci-contre :



3. Les points semblent appartenir à une parabole.
4. On doit avoir $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ et $f(3) = 6$.
5. $f(1) = 1 \Leftrightarrow a \times 1^2 + b \times 1 + c = 1$
   $\Leftrightarrow a + b + c = 1$

   $f(2) = 3 \Leftrightarrow a \times 2^2 + b \times 2 + c = 3$
   $\Leftrightarrow 4a + 2b + c = 3$

   $f(3) = 6 \Leftrightarrow a \times 3^2 + b \times 3 + c = 6$
   $\Leftrightarrow 9a + 3b + c = 6$

   On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 - a - b \\ 4a + 2b + 1 - a - b = 3 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases}$$

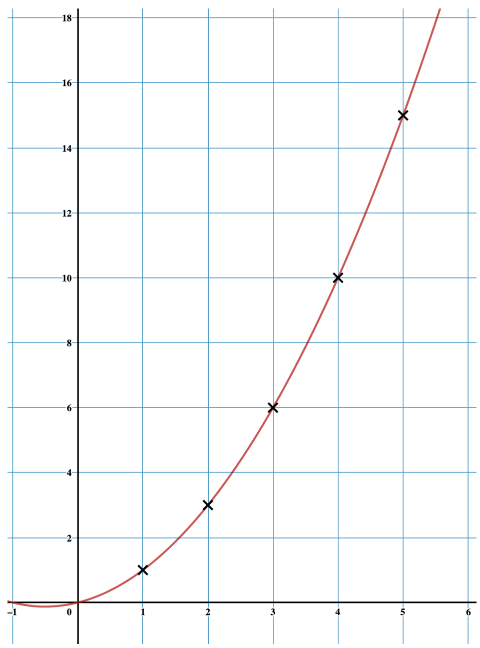
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 - a - b \\ b = 2 - 3a \\ 9a + 3(2 - 3a) + 1 - a - (2 - 3a) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 - a - b \\ b = 2 - 3a \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = \dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

   On a donc $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$.

6. La courbe représentative de la fonction f passe bien par tous les précédents points.



7. $\mathrm{T}_n = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n$. On a bien :

   $\mathrm{T}_1 = \dfrac{1}{2} \times 1^2 + \dfrac{1}{2} \times 1 = 1$

   $\mathrm{T}_2 = \dfrac{1}{2} \times 2^2 + \dfrac{1}{2} \times 2 = 3$

   $\mathrm{T}_3 = \dfrac{1}{2} \times 3^2 + \dfrac{1}{2} \times 3 = 6$

   $\mathrm{T}_4 = \dfrac{1}{2} \times 4^2 + \dfrac{1}{2} \times 4 = 10$

   $\mathrm{T}_5 = \dfrac{1}{2} \times 5^2 + \dfrac{1}{2} \times 5 = 15$

Exercice n°7

1. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ se coupent quand $x^2+5x+4=x+x$. Ce qui est équivalent à $x^2+4x+(4-m)=0$ (1).
   $\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times 1\times(4-m)=4m$.

   $\Delta > 0 \Leftrightarrow m>0$. Il y aura alors deux points d'intersection.
   $\Delta = 0 \Leftrightarrow m=0$. Il y aura alors un seul point d'intersection.
   $\Delta < 0 \Leftrightarrow m<0$. Il n'y aura pas de point d'intersection.

2. Dans cette question, $m=0$.
   La seule solution à l'équation (1) est donc $x_0=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-4}{2\times 1}=-2$.

   Puis $f(-2)=(-2)^2+5\times(-2)+4=-2$.
   Le point d'intersection a pour coordonnées $(-2\,;-2)$.

3. Dans cette question, $m>0$. Les solutions de l'équation (1) sont :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-\sqrt{4m}}{2\times 1}=-2-\sqrt{m} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+\sqrt{4m}}{2\times 1}=-2+\sqrt{m}$$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= (-2-\sqrt{m})^2+5(-2-\sqrt{m}+4) \\ &= (-2)^2-2\times(-2)\times\sqrt{m}+\sqrt{m}^2+5\times(-2)-5\times\sqrt{m}+4 \\ &= -2+m-\sqrt{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= (-2+\sqrt{m})^2+5(-2+\sqrt{m}+4) \\ &= (-2)^2+2\times(-2)\times\sqrt{m}+\sqrt{m}^2+5\times(-2)+5\times\sqrt{m}+4 \\ &= -2+m+\sqrt{m} \end{aligned}$$

   Les coordonnées des deux points d'intersection sont $(-2-\sqrt{m}\,;-2+m-\sqrt{m})$ et $(-2+\sqrt{m}\,;-2+m+\sqrt{m})$.

> Factorisation et étude du signe d'un trinôme du second degré

Exercice n°8

a. $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 81$. Puisque $\Delta > 0$ le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7)-\sqrt{81}}{2\times 2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7)+\sqrt{81}}{2\times 2} = 4$$

On a alors $2x^2 - 7x - 4 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-4)$

b. $\Delta = b^2_4ac = (-10)^2 - 4 \times 5 \times 6 = -20$. Puisque $\Delta < 0$ le polynôme n'admet pas de racine réelle.

c. $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-2) \times 5 = 49$.
Puisque $\Delta > 0$ le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{49}}{2\times (-2)} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{49}}{2\times (-2)} = -\frac{5}{2}$$

On a alors $-2x^2 - 3x + 5 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-1)$

d. $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-10)$. Puisque $\Delta < 0$, le polynôme n'admet pas de racine réelle.

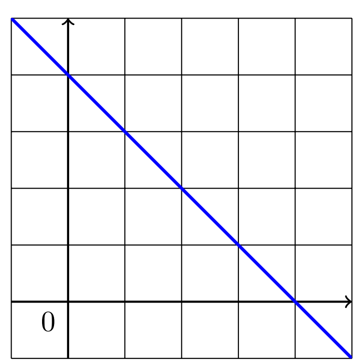
Exercice n°9

1. Testons avec $x = 1$: $f(0) = -7 \times 1^2 - 35 \times 1 + 42 = 0$. Ainsi, 0 est une racine évidente.

2. Notons $x_1 = 1$ et x_2 les deux racines de f. On a $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
   Ce qui est équivalent à $1 + x_2 = -\frac{-35}{-7}$ ce qui est équivalent à $x_2 = -6$.
   On a bien $f(-6) = 0$.

Exercice n°10

1. Dans le menu « Graphique » de la calculatrice, on rentre l'expression littérale de cette fonction.



Il s'agit d'une droite.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 3^3 - 4 \times (-1) \times 4 = 25$. Puisque $\Delta > 0$, f admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = -1$$

On a donc $f(x) = -(x+1)(x-4)$.

3. $f(x) = \dfrac{-x^2+3x+4}{x+1} = \dfrac{-(x+1)(x-4)}{x+1} = -(x-4)$. Cet expression est définie pour tout réel x.

Exercice n°11

1. $P(0) = 4 \times 0^3 - 5 \times 0^2 - 9 \times 0 = 0$.
   0 est donc une racine de P.

2. On a ainsi $P(x) = x(4x^2 - 5x - 9)$. On cherche maintenant à factoriser $4x^2 - 5x - 9$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 4 \times (-9) = 169$. Puisque $\Delta > 0$, ce polynôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{169}}{2\times 4} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{169}}{2\times 4} = \frac{9}{4}.$$

   On a ainsi $P(x) = x(x+1)\left(x - \dfrac{9}{4}\right)$.

3. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)\left(x-\dfrac{9}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1 \quad \text{ou } x = \frac{9}{4}.$$

Exercice n°12

a. $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7 = -31$. Puisque $\Delta < 0$ alors le polynôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$. Ici, $a = 2 > 0$ donc on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

b. $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-1) \times 9 = 72$. Puisque $\Delta > 0$ alors le polynôme est du signe de a sauf entre les racines.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{72}}{2\times(-1)} = 3+3\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{72}}{2\times(-1)} = 3-3\sqrt{2}.$$

x	$-\infty$		$3-3\sqrt{2}$		$3+3\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c. $\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \times (-4) \times 3 = 169$. Puisque $\Delta > 0$ alors le polynôme est du signe de a sauf entre les racines.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-11)-\sqrt{169}}{2\times(-4)} = \dfrac{1}{4}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-11)+\sqrt{169}}{2\times(-4)} = -3$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d. $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 5$. Puisque $\Delta < 0$ alors le polynôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$. Ici, $a = 1 > 0$ donc on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Exercice n°13

a. $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x < 1$ et $x > -1$

$S =]-1\,;1[$

b. $-3x^2 + x + 10 > 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-3) \times 10 = 121$. Puisque $\Delta > 0$ le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{121}}{2\times(-3)} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{121}}{2\times(-3)} = -\dfrac{5}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le polynôme est strictement positif sur $\left]-\dfrac{5}{3}\,;2\right[$.

c. $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times \dfrac{1}{2} \times (-8) = 25$. Puisque $\Delta > 0$ le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-\sqrt{25}}{2\times\frac{1}{2}} = -8$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+\sqrt{25}}{2\times\frac{1}{2}} = 2$.

x	$-\infty$		-8		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le polynôme est négatif ou nul sur l'intervalle $[-8\,;2]$.

d. $x^2 + 3x - 5 \geqslant x + 4$

$x^2 + 2x - 9 \geqslant 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 40$. Puisque $\Delta > 0$ le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-\sqrt{40}}{2\times 1} = -1-\sqrt{10}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+\sqrt{40}}{2\times 1} = -1+\sqrt{10}$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{10}$		$-1+\sqrt{10}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\text{S} = \left]-\infty\,;\, -1-\sqrt{10}\,\right] \bigcup \left[-1+\sqrt{10}\,;\,+\infty\right[$.

Exercice n°14

1. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 + 5x + \dfrac{7}{2} > -x^2 - 3x$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 8x + \dfrac{7}{2} > 0.$

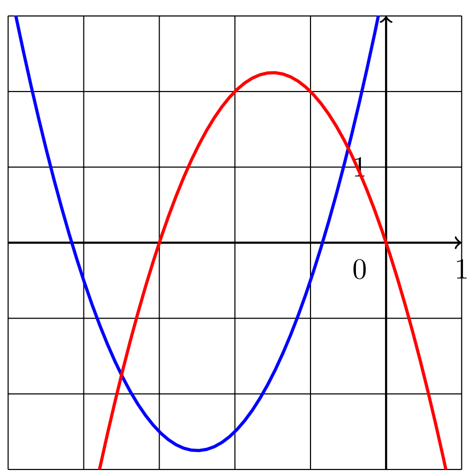
$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 2 \times \dfrac{7}{2} = 36$. Puisque $\Delta > 0$ le polynôme admet deux racines réelles :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-\sqrt{36}}{2\times 2} = -\dfrac{7}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+\sqrt{36}}{2\times 2} = -\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{7}{2}$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,;\, -\dfrac{7}{2}\right[\bigcup \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2. Sur l'intervalle solution trouvée à la question précédente, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.



Exercice n°15

1. $g(1) = 1^3 + 5 \times 1^2 - 12 \times 1 + 6 = 0$. Donc 1 est une racine de g.

2. Puisque 1 est une racine de g, il existe trois réelles a, b et c tels que : $g(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
   $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

   En identifiant les facteurs, on doit résoudre le système suivant :

   $$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 5 \\ c - b = -12 \\ -c = 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c - b = -12 \\ c = -6 \end{cases}$$

   Ainsi, $g(x) = (x-1)(x^2 + 6x - 6)$.

3. On va étudier le signe de $x - 1$ puis celui de $x^2 + 6x - 6$.

   - $x - 1$ est strictement négatif sur $]-\infty\,;1[$ puis positif ou nul sur $[1\,;+\infty[$.
   - Pour $x^2 + 6x - 6$, on va utiliser son discriminant.
     $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 60$. Puisque $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

     $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{60}}{2\times 1} = -3-\sqrt{15} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{60}}{2\times 1} = -3+\sqrt{15}$$

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{15}$		$-3+\sqrt{15}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+6x-6		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice n°16

1. x représente la distance entre M et A. Elle ne peut donc être inférieure à 0 cm ni supérieure à 3 cm. Le domaine de définition de $\mathcal{A}$ est donc $]0\,;3[$

2. On enlève l'aire des 4 triangles rectangles à l'aire de ABCD pour trouver celle de MNPQ.

   Aire de ABCD : $3 \times 5 = 15$ cm^2.

   Aire de AMQ : $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{x \times (5-x)}{2} = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}x$.

Aire de QDP : $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{x \times (3-x)}{2} = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x$.

Aire de PCN : $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{x \times (5-x)}{2} = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}x$.

Aire de MBN : $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{x \times (3-x)}{2} = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x$.

Donc $\mathcal{A}(x) = 15 - \left(-\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x\right)$

$= 2x^2 - 8x + 15$

3. On souhaite résoudre l'équation $2x^2 - 8x + 15 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16$. Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2 \times 2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2 \times 2} = 3.$$

   C'est donc possible si on place M à 1 cm de A ou si on place M à 3 cm de A.

4. On souhaite résoudre l'inéquation $2x^2 - 8x + 15 \leqslant 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 \leqslant 0$.
   On connait déjà les deux racines x_1 et x_2. Le polynôme $2x^2 - 8x + 6$ est du signe de a (donc positif) sur $\mathcal{R}$ sauf entre les racines. On obtient ainsi le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Ainsi, $2x^2 - 8x + 6 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [1\,;\,3]$. L'aire de MNPQ est inférieure ou égale à 9 cm^2 si et seulement si M est situé à 1 cm ou plus de A et à 3 cm ou moins de A.

5. $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-8}{2 \times 2} = 2$. Puisque $a > 0$, f est croissante sur $]-\infty\,;\,2]$ puis croissante sur $[2\,;\,+\infty\,[$.
   On a $f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 6 = -2$.

x	0	2	3
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

6. $\mathcal{A}$ est croissante sur $[2\,;\,3]$. Elle atteindra donc sa valeur maximale en $x = 3$ et aura une aire de $f(3) = 2 \times 3^2 - 8 \times 3 + 15 = 9$ cm^2.