Nombre complexe : étude d'une suite

Étude d'une suite de nombres complexes

Élément de programme travaillé dans la partie « Problèmes possibles ».
Suite de nombres complexes définie par $z_{n+1} = az_n + b$.

Exercice n°1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$. L'unité sera 4 cm.
Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.
Soit la suite (z_n) définit par $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$z_{n+1} = \lambda z_n + i$$

On note M_n le point d'affixe z_n.

1. Montrer que $z_1 = i$, $z_2 = (\lambda + 1)i$ et que $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)i$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n on a $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}i$.
3. On pose $\lambda = i$. Montrer que $z_4 = 0$.
4. Exprimer z_{n+4} en fonction de z_n.
5. Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. $z_1 = \lambda \times 0 + i = i$.
   $z_2 = \lambda \times i + i = (\lambda + 1)i$.
   $z_3 = \lambda \times (\lambda + 1)i + i = (\lambda(\lambda + 1) + 1)i = (\lambda^2 + \lambda + 1)i$.

2. On va montrer ce résultat par récurrence.

   Initialisation

   Pour $n = 1$ on a $z_1 = i$. De plus, $\dfrac{\lambda^1 - 1}{\lambda - 1}i = i = z_1$. La proposition est donc vraie au rang 1.

   Hérédité

   On suppose que pour un entier naturel $n \geqslant 1$ on a $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}i$.

   $z_{n+1} = \lambda z_n + i = \lambda \times \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}i + i = \dfrac{(\lambda^{n+1} - \lambda + \lambda - 1)i}{\lambda - 1} = \dfrac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}i$

   La proposition est vraie au rang $n + 1$, elle est donc héréditaire.

   Conclusion

   La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

3. $z_3 = (-1 + i + 1)i = -1$ donc $z_4 = i \times (-1) + i = 0$.

4. $z_{n+4} = \dfrac{\lambda^{n+4} - 1}{\lambda - 1}i = \dfrac{\lambda^n \times \lambda^4 - 1}{\lambda - 1}i = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} = z_n$.

5. Les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 forment un carré.