Méthode de Newton : Correction

Le méthode de Newton est un algorithme qui permet de résoudre des équations. On considère une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$ où a et b sont deux réels. On souhaite résoudre l'équation $f(x) = 0$. Le principe est le suivant :

(1) On pose $a_0 = a$ et on trace la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en a_1.

(2) On trace ensuite la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a_1. Cette deuxième tangente coupe l'axe des abscisses en a_2.

(3) On construit ainsi une suite de réels a_n, $n \in \mathbb{N}$, où a_n est de plus en plus proche de la solution de notre équation.

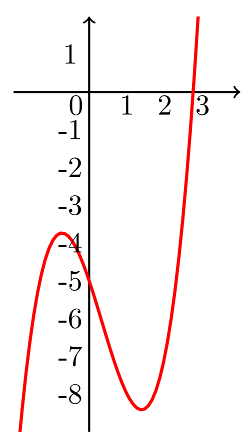
C'est vers 1670 que Newton fait connaître cette méthode.

Application On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 3x - 5$. On souhaite trouver une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

A. Restreindre l'intervalle de recherche

1. Représenter graphiquement la fonction f à l'aide la calculatrice ou d'un logiciel de géométrie dynamique. Donner alors un intervalle de la forme $[\ a\ ;\ b\ ]$ où a et b dont deux entiers relatifs dans lequel semble se situer la solution de l'équation $f(x) = 0$.

   Il semble qu'il n'y ait qu'une seule solution à l'équation $f(x) = 0$ et que cette dernière se situe dans l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.



2. Déterminer la dérivée de la fonction f.

   $f'(x) = 3x^2 - 2x - 3$.

3. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $[\ -3\ ;\ 3\ ]$.

   On cherche les racines de f'. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 40$.
   Puisque $\Delta > 0$, f' admet deux racines distinctes sur $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{40}}{2 \times 3} = \frac{1 - \sqrt{10}}{3} \qquad x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{40}}{2 \times 3} = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$$

x	-3		$\frac{1-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{1+\sqrt{10}}{3}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-32	$\nearrow$	$\approx -3{,}7$	$\searrow$	$\approx -8{,}4$	$\nearrow$	4

4. Donner alors un autre intervalle dans lequel se situe la solution de $f(x) = 0$.

   Le seul endroit où $f(x)$ change de signe dans le précédent tableau de variations, c'est entre $\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$ et 3. C'est donc dans cet intervalle que se situe la solution.

B. Recherche d'une valeur approchée de la solution en utilisant la méthode de Newton

On construit la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a où a_0 est un réel de l'intervalle trouvé dans la partie A. Cette tangente coupe l'axe des abscisse en a_1.

1. Donner l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

   $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

2. Déterminer a_1 en fonction de a.

   En $x = a_1$, la tangente coupe l'axe des abscisse. On peut donc écrire : $0 = f'(a_0)(a_1 - a_0) + f(a_0)$.

   Ce qui est équivalent à $0 = f'(a_0)a_1 - f'(a_0)a_0 + f(a_0)$ ou encore $a_1 = a_0 - \dfrac{f(a_0)}{f'(a_0)}$.

3. On va maintenant programmer cet algorithme sur Python. L'utilisateur saisira la valeur de a_0 et la marge d'erreur e souhaitée de la solution. Compléter le programme suivant :

```python

def fonction(x):
    return x**3-x**2-3*x-5

def derivee(x):
    return 3*x**2-2*x-3

def newton(a0,e):
    erreur = 1
    while erreur > e
        x=a0+fonction(a_0)/derivee(a0)
        erreur = abs(x-a0)
        a0 = x
    return x
```

4. Tester ce programme pour trouver une valeur approchée à 10^{-5} près de la solution de $x^3 - x^2 - 3x - 5 = 0$.

   En saisissant « print(newton(2,0.00001) », on trouve comme valeur approchée de la solution 2,7511007023760334.