Les Graphes

1 Généralités sur les graphes

Définitions

Un **graphe non orienté** est un ensemble de points reliés par des lignes. Ces points sont alors appelés des **sommets** et les lignes sont appelées les **arêtes**.
Le nombre de sommets du graphe est appelé **ordre**.
Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes partant de ce sommet.
Quand deux sommets sont reliés par une arête on dit qu'ils sont **adjacents**.
Enfin, une **boucle** est une arête dont les extrémités ont le même sommet.

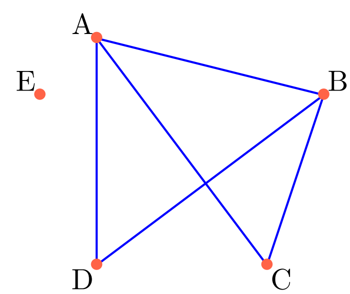
Exemple

Le graphe non orienté ci-contre est d'ordre 5 puisqu'il comporte 5 sommets.

Le degré des sommets A et B est de 3 alors que celui du sommet E est de 0.

B et C sont adjacents mais pas D et C.

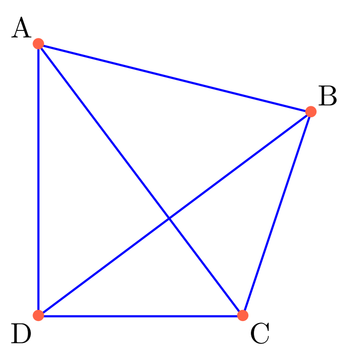
Il n'y a pas de boucle sur ce graphe.



Définition

On dit qu'un graphe est **complet** si tous les sommets sont adjacents entre eux.

Exemple



Tous les sommets sont reliés entre eux par une arête : il s'agit donc d'un graphe complet.

Propriété

La somme des degré de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes présentes dans ce graphe.

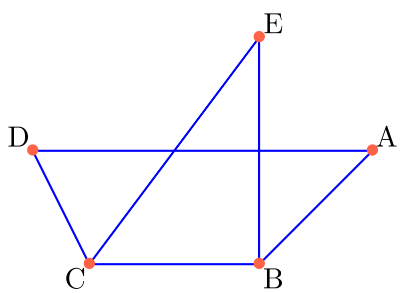
Exemple

On reprend l'exemple de la définition précédente.
Chacun des sommets a un ordre égal à 3. Leur somme est donc égale à 12.
Dans ce graphe, il y a 6 arêtes. Le double de 6 est bien égal à 12.

Définitions

On considère un graphe non orienté.
On appelle **chaîne** une succession d'arêtes mises les unes à la suite des autres.
La **longueur de la chaîne** est alors le nombre d'arêtes qui composent cette chaîne. Si ses extrémités coïncident, on parle de **chaîne fermée**.
Enfin, on appelle **cycle** une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.

Exemple



Sur le graphe ci-contre, A - B - E est une chaîne de longueur 3.

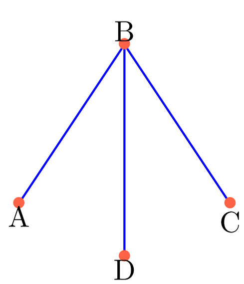
B - E - C - B est une chaîne fermée de longueur 3.

A - D - C - B - A est un cycle de longueur 4.

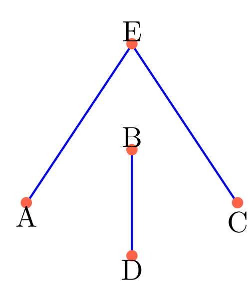
Définition

On dit qu'un graphe est **connexe** si chacun des sommets du graphe peut être relié à un autre par une chaîne.

Exemple



Ce premier graphe est connexe.
Chacun des sommets peut être relié à un autre par une chaîne.



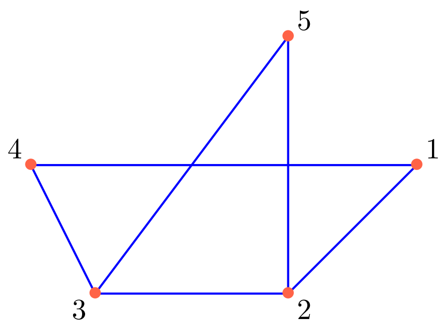
Ce n'est pas le cas de celui-ci.
I et H ne peuvent pas être reliés aux autres sommets du graphe.

2 Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère un graphe non orienté d'ordre n où chacun des sommets est numéroté de 1 à n.
On appelle **matrice d'adjacence** associée à ce graphe la matrice carrée de taille n dont chaque coefficient a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

Exemple



La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le coefficient a_{45} vaut 0 car aucune arête ne relie les sommets 4 et 5.

Remarque

On remarque que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.

Propriété

On considère une matrice d'adjacence A d'un graphe non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
Le nombre de chemins (ou chaînes) de longueur p reliant le sommet i au sommet j est égal au coefficient a_{ij} de la matrice A^p, où $p \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration

Montrons cette propriété par récurrence.

Initialisation

Pour $p = 1$, $A^n = A$ qui est la matrice d'adjacence du graphe. Donc a_{ij} est, par définition, le nombre de chemins de longueur 1 reliant le sommet i au sommet j.

Hérédité

Supposons que pour un entier p supérieur ou égal à 1, la propriété soit vraie.

Démonstration : suite et fin

$$\left(a_{ij}^{(p+1)}\right) = A^{p+1} = A \times A^p = (a_{ij}) \times \left(a_{ij}^{(p)}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}^{(p)}\right)$$

a_{ik} est le nombre de chemins de longueur 1 reliant le sommet i au sommet k.
$a_{kj}^{(p)}$ est le nombre de chemins de longueur p reliant le sommet k au sommet j.
Donc $a_{ik}a_{kj}^{(p)}$ est le nombre de chemins de longueur $p+1$ reliant le sommet i au sommet j en passant par le sommet k.
En sommant tous ces chemins, on montre que la proposition est héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie au rang 1 et est héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

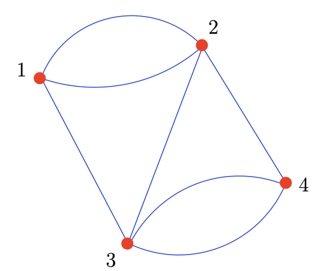
Exemple (d'après lycée d'adulte)

Les arêtes du graphe ci-contre représentent des pistes de ski de fond mesurant chacune 2 km. Les sommets de ce graphe sont les différents points d'accès à ce domaine skiable.
On souhaite connaître le nombre de parcours de 6 km reliant le sommet 3 à lui-même.

La matrice d'adjacence de ce graphe est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduite que $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 14 & 5 \\ 16 & 8 & 11 & 14 \\ 14 & 11 & \mathbf{8} & 16 \\ 5 & 14 & 16 & 4 \end{pmatrix}$.



On a alors 8 parcours reliant le sommet 3 à lui-même.

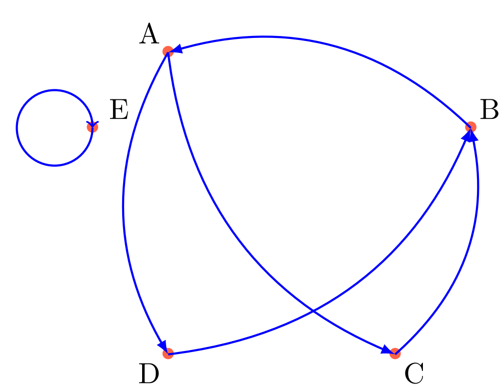
3 Graphes orientés, pondérés

Définitions

On dit qu'un graphe est **orienté** si ses arêtes sont affectés d'un sens.
Dans ce cas, les arêtes sont appelés les **arcs**. On appellera alors **chemin** une succession d'arcs et **circuit** un chemin fermé dont tous les arcs sont distincts.

Exemple

Le graphe ci-contre est un graphe orienté d'ordre 5.
Il y a une boucle sur le sommet E.
A−C−B est un chemin de longueur 2.
B−A−D−B est un circuit de longueur 3.

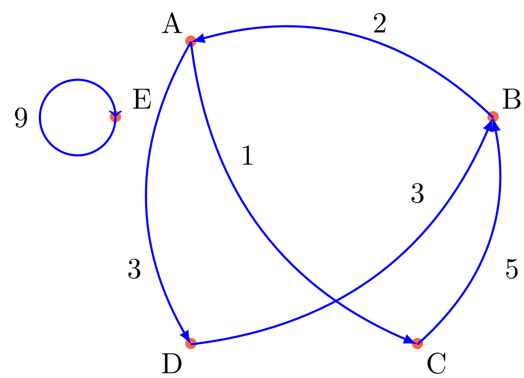


Définitions

On dit qu'un graphe est **pondéré** si ses arêtes sont affectées d'un nombre que l'on appelle alors **poids**.
Le **poinds** d'une chaîne (ou d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (ou des arcs) qui la constitue.

Exemple

Le graphe ci-contre est un graphe orienté pondéré.
Le poids entre le sommet D et B est de 3.
Le poids du chemin B−A−D−B est de 8 $(2 + 3 + 3)$.



Remarque

Le chemin le plus court entre deux sommets est le chemin qui a le poids le plus petit.

4 Chaîne de Markov

Définition

On appelle **graphe probabiliste** un graphe orienté pondéré tel que :

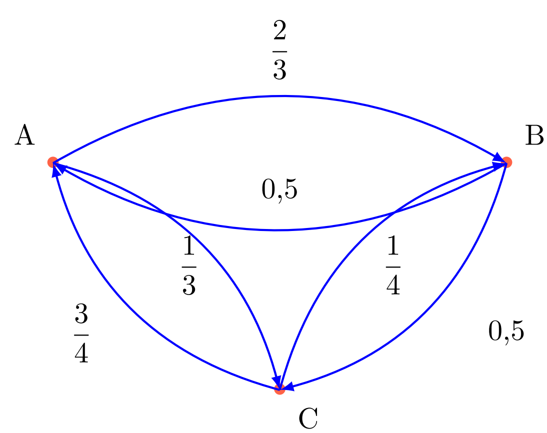
- Tous les poids sont des réels de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
- La somme des poids des chemins issus d'un sommet est égale à 1.

La matrice d'adjacence d'un tel graphe est alors appelée **matrice stochastique**.

Exemple

Le graphe ci-contre est un graphe probabiliste.
La somme des chemins issus de A est égale à 1, tout comme celle des chemins issus de B et de C.
La matrice d'adjacene de ce graphe est la suivante :
La somme des coefficients d'une même ligne est égale à 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$



Définitions

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) prenant des valeurs x_i où chaque x_i appartient à un ensemble fini E.
On suppose que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_0,\ X_1,\ ....,\ X_n)$ est la même que celle de X_{n+1} sachant X_n.
On dit alors que la suite de variables aléatoires (X_n) est une **chaîne de Markov** sur E.
E est appelé l'**espace d'états**.

Remarques

On peut aussi formuler cette définition de façon plus formelle :
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeur dans un ensemble fini dénombrable E. On dit que (X_n) est une chaîne de Markov si pour tout x_0, x_1, ..., x_{n+1} dans E, on a :

$$P\left(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\right) = P\left(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n\right).$$

Autrement dit, dans une chaîne de Markov, l'état à l'étape $n+1$ ne dépend que de celui à l'état n et non de ceux antérieurs. La probabilité de passer d'un état à un autre ne dépend donc pas de n.

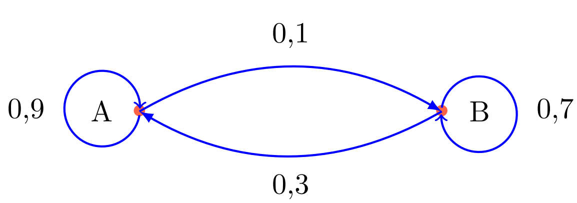
Définition

On appelle **distribution initiale** d'une chaîne de Markov (X_n) la loi de probabilité de X_0. Elle est représentée par une matrice ligne, souvent notée π_0.

Exemple

La maire de la ville de Jean-Kevin propose une carte jeune annuelle donnant droit aux 12-18 ans à des réductions dans certains magasins de la ville.
Ces dernières années, lors du renouvellement de la carte, on a constaté que 10% des possesseurs de la carte ne la rachètent pas. De plus, 30% de cette population qui ne la possédaient pas l'année précédente achètent la carte.
On fait l'hypothèse que l'effectif de la population des 12-18 ans est constant et que l'évolution va rester la même pour les prochaines années.
En 2018, 80% des jeunes 12-18 ans ne possèdent pas la carte.

Nous sommes dans une situation d'une chaîne de Markov à deux états. On note A l'état « posséder une carte jeune » et B l'état « ne pas posséder une carte jeune ». On a alors le graphe probabiliste associé à cette situation :



La distribution initiale est donnée par la matrice ligne suivante :

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Définition

On appelle **matrice de transition** d'une chaîne de Markov (X_n) la matrice carré d'ordre n dont le coefficient a_{ij} est la probabilité de transition situé sur l'arc reliant le sommet i vers le sommet j. Si l'arc n'existe pas, le coefficient est nul.

Exemple

En reprenant l'exemple de la carte jeune, la matrice de transition associée à la situation est la matrice carrée d'ordre 2 ci-dessous :

$$T = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Propriété

Soit (X_n) une chaîne de Markov de distribution initiale π_0 et dont la matrice de transition est notée T.
Soit k un entier naturel. On note π_k la matrice ligne des états à l'étape k.
La matrice ligne donnant la distribution à l'étape $k+1$ est :

$$\pi_{k+1} = \pi_k \times T$$

Démonstration

On se place dans le cas d'une chaîne de Markov à 3 états que l'on notera a, b et c.
Pour tout entier naturel k, les évènements $\{X_k = a\}$, $\{X_k = b\}$ et $\{X_k = c\}$ forment un système complet fini d'évènements.
Pour tout $x_j \in \{a\,;\,b\,;\,c\}$, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{k+1} = x_j) = P_{(X_k=a)}(X_{k+1} = x_j)P(X_k = a) + P_{X_k=b}(X_{k+1} = x_j)P(X_k = b) + P_{X_k=c}(X_{k+1} = x_j)P(X_k = c)$$

Ce qui est bien le j-ième coefficient de la matrice $\pi_k T$.

Propriété

Soit (X_n) une chaîne de Markov de distribution initiale π_0 et dont la matrice de transition est notée T.
Soit k un entier naturel. On note π_k la matrice ligne des états à l'étape k.
La matrice ligne donnant la distribution à l'étape k est :

$$\pi_k = \pi_0 T^k$$

Démonstration

On considère une chaîne de Markov à p états.

Initialisation

Pour $k = 0$, $T_0 = I_p$. On a donc bien $\pi_0 T^0 = \pi_0$.

Démonstration : suite et fin

Hérédite

Supposons que pour un entier naturel k, on ait $\pi_k = \pi_0 T^k$.

$$\begin{aligned}\pi_{k+1} &= \pi_k T \\ &= \pi_0 T^k T \\ &= \pi_0 T^{k+1}\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$, elle est héréditaire.

Conclusion

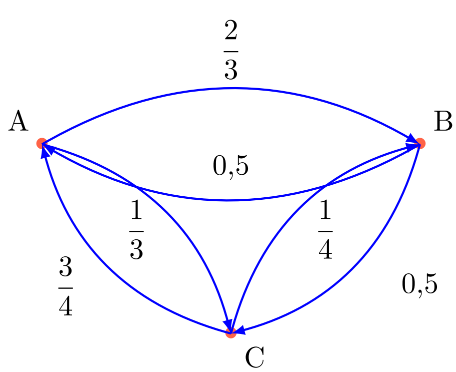
La propriété est vraie au rang $k = 0$ et est héréditaire à partir de ce rang : elle est donc vraie pour tout entier naturel k.

Remarque

Si on note P la matrice de transition d'une chaîne de Markov, le coefficient (ij) de la matrice P^n est la probabilité de passer de l'état E_i à l'état E_j en n transitions.

Exemple (d'après Maths et Tiques)

Dans une équipe de football, trois attaquants A, B et C se font des passes de façon aléatoire. Cette situation est représentée par le graphe ci-dessous.



La matrice de transition associée à cette situation est donc la suivante :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Au début de la situation, c'est l'attaquant A qui a le ballon. La distribution initiale est donc $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On cherche la probabilité que l'attaquant C possède le ballon après la 3$^{\text{ème}}$ passe.

A l'aide de la calculatrice, on trouve tout d'abord : $T^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \\ \frac{17}{48} & \frac{7}{24} & \frac{17}{48} \\ \frac{17}{32} & \frac{17}{96} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$.

Puis $\pi_3 = \pi_0 \times T^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \end{pmatrix}$.

La probabilité que l'attaquant C possède le ballon après la 3$^{\text{ème}}$ passe est donc de $\frac{17}{72}$ soit environ 24%.

5 Distribution invariante

Définition

Soit (X_n) une chaîne de Markov convergente. On note T sa matrice de transition.
Si la suite (π_n) des états de cette chaîne vérifie $\pi_{n+1} = \pi_n T$ alors la limite π de cette suite définit un **état stable** qui est solution de l'équation $\pi = \pi T$.
Quand une telle distribution π existe, on la nomme **distribution invariante** de la chaîne de Markov.

Exemple

On considère la matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,06 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$ d'une chaîne de Markov (X_n).

Supposons que cette chaîne possède un état stable $\pi \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$. On a alors $\pi = \pi T$ et $x + y = 1$. On obtient ainsi le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0,94x + 0,14y & = & x \\ 0,06x + 0,86y & = & y \\ x + y & = & 1 \end{array} \right.$$

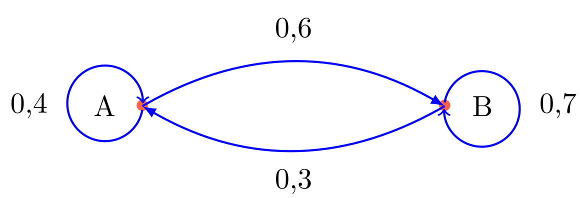
Après résolution, on trouve $x = 0,7$ et $y = 0,3$.

Propriété

On considère une chaîne de Markov à deux états de matrice de transition T. Soient p et q deux réels tout deux compris strictement entre 0 et 1.
On a $T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$.
La suite des matrices lignes (π_n) des états d'une telle chaîne converge vers une distribution invariante π tel que $\pi = \pi T$.
De plus, π ne dépend pas de la distribution initiale π_0.

Exemple

On souhaite étudier la convergence de la chaîne de Markov représentée par le graphe orienté pondéré ci-dessous :



La matrice de transition associée est $T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. On pose (π_n) la suite des matrices lignes des états de cette chaîne de Markov.
On a donc $\pi_{n+1} = \pi_n T$. Soient p et q deux réels tels que $p + q = 1$.
L'état stage recherché est de la forme $\pi \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$ et vérifie $\pi = \pi T$.

Exemple : suite et fin

On a donc $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. On obtient alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p & = & 0,4p + 0,3q \\ q & = & 0,6p + 0,7q \end{array} \right.$$

On trouve alors $q = 2p$. Puisque $p + q = 1$ on obtient $1 - p = 2p$ soit $p = \dfrac{1}{3}$ et $q = \dfrac{2}{3}$.

Autrement dit, quel que soit la distribution initiale, la probabilité d'être en A tend vers $\dfrac{1}{3}$ et la probabilité d'être en B tend vers $\dfrac{2}{3}$.