Correction sur la dérivation : cas global

> Dérivées des fonctions usuelles, somme et produit par un réel

Exercice n°1

a. $f'(x) = -4$ sur $\mathbb{R}$

b. $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8$ sur $\mathbb{R}$

c. $f'(x) = \dfrac{2}{5} \times 5x^4 + 4 \times 2x^3 - 2 \times \sqrt{2}x = 2x^4 + 8x - 2\sqrt{2}x$ sur $\mathbb{R}$

d. $f'(x) = \dfrac{1}{3} \times 6 \times 4x^5 - \dfrac{1}{3} \times 3 \times 2x^2 + \dfrac{1}{3} \times 3 = 8x^5 - 2x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$

e. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - 2$ sur $\mathbb{R}^*$

f. $f'(x) = 7 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) - 8 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{7}{x^2} - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$

g. $f'(x) = 3 \times 4x^3 - 7 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 12x^3 + \dfrac{7}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

h. $f(x) = \dfrac{3x^4}{x} - \dfrac{2x^2}{x} + \dfrac{2}{x} = 3x^3 - 2x\dfrac{2}{x}$ donc $f'(x) = 9x^2 - 4x - \dfrac{2}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice n°2

a. $f'(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$

b. $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$

c. $f'(x) = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$

d. $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

e. $f'(x) = 4$ sur $\mathbb{R}$

f. $f'(x) = 10x$ sur $\mathbb{R}$

g. $f'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{x}}$ sur $]\,0\,;\,\infty\,[$

h. $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice n°3

a. $f'(x) = 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$

b. $f'(x) = -4$ sur $\mathbb{R}$

c. $f'(x) = 4x - 5$ sur $\mathbb{R}$

d. $f'(x) = -1$ sur $\mathbb{R}$

e. $f'(x) = 15x^4 - 4x$ sur $\mathbb{R}$

f. $f'(x) = x + \dfrac{5}{7}$ sur $\mathbb{R}$

g. $f'(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$ sur $\mathbb{R}$

h. $f'(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4}$ sur $\mathbb{R}$

> Dérivées et opérations : produit

Exercice n°4

a. On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. On a donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

Sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

b. On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x + 4$. On a donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x(2x+4) + x^2 \times 2 = 6x^2 + 8x$

Sur $\mathbb{R}$.

c. On pose $u(x) = 4x$ et $v(x) = x - 5$. On a donc $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 1$

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 4(x-5) + 4x \times 1 = 8x - 20$

Sur $\mathbb{R}$.

d. On pose $u(x) = x^3$ et $v(x) = x - \sqrt{x}$. On a donc $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&= 3x^2(x - \sqrt{x}) + x^3\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= 4x^3 - 3\sqrt{x} - \frac{x^3}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{4x^3 \times 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} - x^3}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{8x^3\sqrt{x} - 6x - x^3}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{8x^3\sqrt{x}\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - x^3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} \\
&= \frac{8x^3 - 6\sqrt{x} - x^2\sqrt{x}}{2}
\end{aligned}$$

Sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

> Dérivées et opérations : inverse et quotient

Exercice n°5

a. On pose $u(x) = x - 3$. Donc $u'(x) = 1$

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{1}{(x-3)^2}$$

Sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

b. On pose $u(x) = x^2 - 1$. Donc $u'(x) = 2x$.

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

Sur $]-\infty\,;-1\,[\,\bigcup\,]-1\,;1\,[\,\bigcup\,]\,1\,;+\infty\,[$.

c. On pose $u(x) = x + 4$. Donc $u'(x) = 1$

$$f'(x) = -2\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{2}{(x+4)^2}$$

Sur $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$.

d. On pose $u(x) = x^2 + 1$. Donc $u'(x) = 2x$

$$f'(x) = -5 \times \left(-\frac{u'(x)}{u(x)^2}\right) = \frac{10x}{(x^2+1)^2}$$

Sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°6

a. On pose $u(x) = x^2 + 2$ et $v(x) = 2 - x$. Donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -1$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2x(2-x) - (x^2+2) \times (-1)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x+2}{(2-x)^2}$$

Sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

b. On pose $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x^2 - x - 6$. Donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x - 1$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1 \times (x^2-x-6) - (x+1)(2x-1)}{(x^2-x-6)^2} = \frac{-x^2-2x-5}{(x^2-x-6)^2}$$

$x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 3$. L'ensemble de dérivabilité est donc $]-\infty\,;-2\,[\,\bigcup\,]-2\,;3\,[\,\bigcup\,]\,3\,;+\infty\,[$.

c. On pose $u(x) = 2x^2 + 5x + 1$ et $v(x) = x^2 + 1$. Donc $u'(x) = 4x + 5$ et $v'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(4x+5)(x^2+1) - (2x^2+5x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-5x^2+6x+5}{(x^2+1)^2}$$

Sur $\mathbb{R}$.

d. On pose $u(x) = 2\sqrt{x} + 3$ et $v(x) = x$. Donc $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} \times x - 2\sqrt{x} \times x}{x^2} = \frac{\dfrac{x-2x^2}{\sqrt{x}}}{x^2} = \frac{x-2x^2}{x^2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}-2x^2\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2x\sqrt{x}}{x^2}$$

Sur $\mathbb{R}^*$.

> Dérivées et opérations : composée

Exercice n°7

a. $g'(ax+b)\times a = 2\times(-4x+9)\times(-4) = 32x-72$

b. $g'(ax+b)\times a = 8\times\dfrac{1}{2\sqrt{8x+6}} = \dfrac{4}{\sqrt{8x+6}}$

c. $g'(ax+b)\times a = 4(7x-10)^3\times 7 = 28(7x-10)^3$

d. $g'(ax+b)\times a = 4\times\dfrac{1}{2\sqrt{4x+9}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+9}}$

> Applications

Exercice n°8

1. On pose $u(x)=x^2+2-1$ et $v(x)=x^2+1$. On a donc $u'(x)=2x+1$ et $v'(x)=2x$.

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}=\frac{(2x+1)(x^2+1)-(x^2+x-1)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+4x+1)^2}$$

2. Une équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 est $y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$.
   Or $f'(-1)=1$ et $f(1)=\dfrac{1}{2}$. L'équation est donc $y=x+\dfrac{3}{2}$.

Exercice n°9

1. On cherche l'instant t au cours duquel $x_1(t)=x_2(t)$.
   On doit donc résoudre l'équation $2t^2+t+2=-t^2+5t+8$ ce qui est équivalent à résoudre $3t^2-4t-6=0$.

   $\Delta=(-4)^2-4\times 3\times(-6)=88$
   $\Delta>0$ l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)-\sqrt{88}}{2\times 3}=\frac{2-\sqrt{22}}{3}\approx -0,897$$
   $$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)+\sqrt{88}}{2\times 3}=\frac{2+\sqrt{22}}{3}\approx 2,23$$

   On cherche un temps : on ne garde donc que la solution positive. Les deux mobiles se rencontrent au bout d'environ 2,23 secondes.

2. $x_1'(t)=4t+1$ et $x_2'(t)=-2t+5$.
   $x_1'\left(\dfrac{2+\sqrt{22}}{3}\right)\approx 9,9$ et $x_2'\left(\dfrac{2+\sqrt{22}}{3}\right)\approx 0,54$

3. Le premier mobile dépasse le deuxième.