Dérivation : point de vue local

1 Nombre dérivé

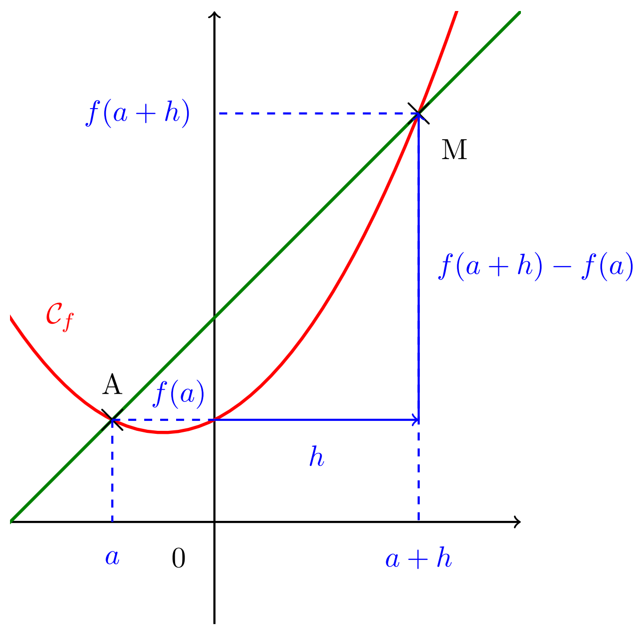
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un nombre réel a.
La fonction τ définie pour tout réel $h \neq 0$ telle que $a+h \in I$ par :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

est appelée **taux d'accroissement** de f en a.

Remarque On considère deux points A et M de la courbe représentative de f dont les abscisses respectives sont a et $a+h$.
$\tau(h)$ représente le coefficient directeur de la droite (AM). On a en effet $\tau(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}}}$.



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel de I.
On dit que f est **dérivable en a** si le taux d'accroissement de f en a admet une limite réelle quand h tend vers 0. Ce nombre « limite » est noté $f'(a)$ est se nomme **nombre dérivé de f en a**.
Quand f est dérivable en a on a ainsi :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemples

- On veut calculer la valeur du nombre dérivé de la fonction carré en 3.

  $\forall\ h \neq 0 : \tau(h) = \dfrac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = 6 + h$. Et $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 6$. Donc $f'(3) = 6$ en notant f la fonction carrée.

- Notons g la fonction racine carré. On veut vérifier si elle est dérivable en 0.

  $\forall\ h \neq 0 : \tau(h) = \dfrac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$. Et $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = +\infty$ qui n'est pas un nombre réel. La fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0.

2 Tangente à une courbe en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit M un point du plan.
La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ en un point A est la position limite de la droite (AM) quand le point M se rapproche de A tout en restant sur $\mathcal{C}_f$.

(voir animation géobégra)

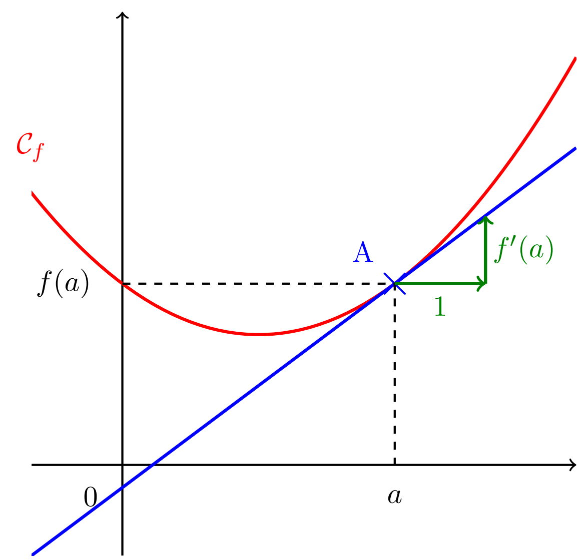
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel de I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
Si f est dérivable en a, la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $\text{A}(a\,;\ f(a))$ est la droite passant par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

Propriété

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $\text{A}(a\,;\ f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



Démonstration L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est de la forme $y = mx + p$ où m est le coefficient directeur de la droite. Par définition, on a $m = f'(a)$. Il reste p à déterminer.

Puisque $\text{A}(a\,;\ f(a))$ appartient à $\mathcal{C}_f$, on a $f'(a) \times a + p = f(a)$ ce qui est équivalent à $p = f(a) - af'(a)$.

Ainsi, l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $\text{A}(a\,;\ f(a))$ est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exemple On considère la fonction f définie sur $\mathcal{R}$ par $x^2 - x - 1$. On souhaite déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 3. Une équation de cette tangente est $y = f'(3)(x-3) + f(3)$.

$f(3) = 3^2 - 3 - 1 = 5$.

Pour calculer $f'(3)$, on doit connaître la limite du taux d'accroissement de f en 3.

$\tau(h) = \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \dfrac{(3+h)^2 - (3+h) - 1 - 5}{h} = \dfrac{h^2 + 5h}{h} = h + 5$.

$\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 5$. Donc $f'(3) = 5$.

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 3 est donc $y = 5(x-3) + 5$.