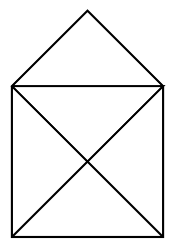
Un graphe eulérien

Généralités sur les graphes eulériens

Définition

On appelle **chemin eulérien** d'un graphe non orienté un chemin passant par chacune de l'ensemble des arêtes une, et une seule fois. Si ce chemin revient au sommet de départ, on parle alors de **cycle eulérien**.
Si un graphe admet un cycle eulérien, on parle de **graphe eulérien**.



Ce graphe admet un chemin eulérien mais n'est pas un graphe eulérien.

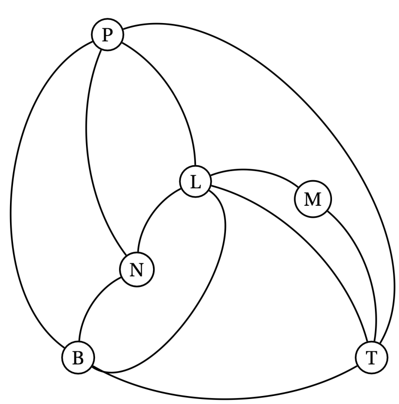
Théorème d'Euler

Soit G un graphe connexe.

- G admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets de G sont de degré pair.
- G admet une chaîne eulérienne distincte d'un cycle si et seulement si deux sommets de G exactement sont de degré impair. Dans ce cas, la chaîne est d'extrémité ces deux sommets.

Exercice n°1 *Bac TES Polynésie Juin 2018*

Un journaliste britannique d'une revue consacrée à l'automobile doit tester les autoroutes françaises françaises. Pour remplir sa mission, il décide de louer une voiture et de circuler entre six grandes villes françaises : Bordeaux (B), Lyon (L), Marseille (M), Nantes (N), Paris (P) et Toulouse (T).
Le réseau autoroutier reliant ces six villes est modélisé par le graphe ci-dessous sur lequel les sommets représentent les villes et les arêtes représentent les liaisons autoroutières entre ces villes.



1. (a) Quel est l'ordre du graphe ?
   (b) Le graphe est-il complet ? Justifier la réponse.
2. (a) On admet que le graphe est connexe. Le journaliste envisage de parcourir chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule.
   Est-ce possible ? Justifier la réponse.
   (b) Le journaliste va-t-il pouvoir louer sa voiture dans un aéroport parisien, parcourir chacune des liaisons une et une seule fois puis rendre la voiture dans le même aéroport ? Justifier la réponse.
3. On nomme G la matrice d'adjacence du graphe (les villes sont rangées dans l'ordre alphabétique). On donne alors :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 1 & 1 & 1 \\ ... & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

   (a) Recopier la matrice d'adjacence.
   (b) Alors qu'il se trouve à Paris, le rédacteur en chef demande au journaliste d'être à Marseille exactement trois jours plus tard pour assister à une course automobile. Le journaliste décide chaque jour de s'arrêter dans une ville différente.
   Déterminer le nombre de trajets possibles.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. (a) Le graphe possède 6 sommets : il est donc d'ordre 6.
   (b) Il n'y a pas d'arête reliant Paris et Marseille : le graphe n'est donc pas complet.
2. (a) On a les degrés suivants :

Sommet	B	L	M	N	P	T
Degré	4	5	2	3	4	4

   Il y a exactement deux sommets (L et N) de degré impairs. D'après le théorème d'Euler, on peut parcourir le graphe en passant une et une seule fois par chacune des liaisons modélisées, à condition de partir de Lyon et d'arriver à Nantes ou inversement.
   (b) Puisque tous les sommets ne sont pas de degré pair, le graphe n'est pas Eulérien. Le journaliste ne va donc pas pouvoir réaliser cela.
3. (a) On obtient la matrice d'ajdacence suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) On cherche les trajets de longueur 3 qui sont données par G^3.
   A l'intersection de la ligne 5 (sommet Paris) et de la colonne 3 (sommet Marseille) il y a le coefficient 5. Cela signifie qu'il y a 5 trajets de longueur 3 pour aller de Paris à Marseille.