Un code correcteur

Etude du code de Hamming (7 ;4)

Un bit est une information représentée par un 0 ou un 1.
On considère un mot formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3, b_4. Le mot 1101 permet donc d'avoir $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.
On ajoute à cette liste une clé de contrôle $c_1c_2c_3$ formée de trois bits :

- c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2
- c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2
- c_3 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

Exercice n°1

1. a. Justifier que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.
   b. Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.
2. Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée. Montrer que si on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé alors seule la valeur de c_1 est inchangée.
3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. A partir des 4 premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare avec les bits de contrôle reçus.
   Recopier et compléter le tableau ci-dessous.
   La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé, et J que ces deux bits sont égaux.

Bit erroné / Bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J							
c_2	F							
c_3	F							

4. Montrer que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.
5. Voici deux messages de 7 bits :

   A = 0100010 B = 1101001

   On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur de transmission. Dire s'ils comportent une erreur, et la corriger le cas échéant.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. Il s'agit de restes dans la division euclidienne par 2. Or tout entier n s'écrit $2n+0$ ou $2n+1$. Les seuls restes possibles sont donc 0 ou 1.

2. Avec ce mot, on a $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.
   $b_2 + b_3 + b_4 = 1$. Le reste c_1 vaut donc 1.
   $b_1 + b_3 + b_4 = 2$. Le reste c_2 vaut donc 0.
   $b_1 + b_1 + b_4 = 2$. Le reste c_3 vaut donc 0.
   La clé de contrôle du mot 1001 est donc 100.

3. Changeons la valeur de b_1 par un bit b'_1. On a alors $b'_1 \equiv b_1 + 1\ (2)$.
   La valeur de c_1 ne dépend pas de b_1 donc c_1 ne varie pas.
   $b'_1 + b_2 + b_4 \equiv b_1 + b_3 + b_4 + 1\ (2)$ ce qui modifie la valeur de c_2.
   $b'_1 + b_2 + b_4 \equiv b_1 + b_2 + b_4 + 1\ (2)$ ce qui modifie la valeur de c_3.

4. Voici le tableau complété :

Bit erroné / Bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J	F	F	F	F	J	J	J
c_2	F	J	F	F	J	F	J	J
c_3	F	F	J	F	J	J	F	J

5. Les huit triplets du tableau (J ; F ; F), (F ; J ; F), ..., (J ; J ; J) sont tous différents.
   Quand on reçoit un message, on calcule les codes de contrôle et on les compare avec ceux que l'on a reçus. Selon le triplet obtenu, on sait quel est le bit erroné, s'il y en a un.

6. Pour le message A :
   - $b_2 + b_3 + b_4 = 1 + 0 + 0 = 1$ qui a pour reste 1 dans la division euclidienne par 2.
   - $b_1 + b_3 + b_4 = 0 + 0 + 0 = 0$ qui a pour reste 0 dans la division euclidienne par 2.
   - $b_1 + b_2 + b_4 = 0 + 1 + 0 = 1$ qui a pour reste 1 dans la division euclidienne par 2.

   Le code correct est 101 alors que le code reçu est 010.
   La différence entre les deux codes correspond au triplet (F ; F ; F).
   D'après le tableau, c'est donc b_4 qui est erroné et le bon message est donc 0101010.

   Pour le message B :
   - $b_2 + b_3 + b_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ qui a pour reste 0 dans la division euclidienne par 2.
   - $b_1 + b_3 + b_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ qui a pour reste 0 dans la division euclidienne par 2.
   - $b_1 + b_2 + b_4 = 1 + 1 + 1 = 3$ qui a pour reste 1 dans la division euclidienne par 2.

   Le code correct est 001 qui est identique au code reçu. Il n'y a donc pas d'erreur dans le message B.