Exercices sur la convexité

> Déterminer des dérivées secondes

Exercice n°1 Pour chacun des cas suivants, déterminer $f''(x)$:

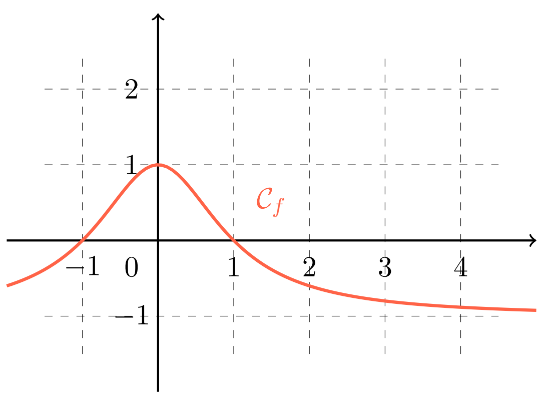
a. $f(x) = -4x^2 + 56x - 96$ **b.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **c.** $f(x) = e^x$

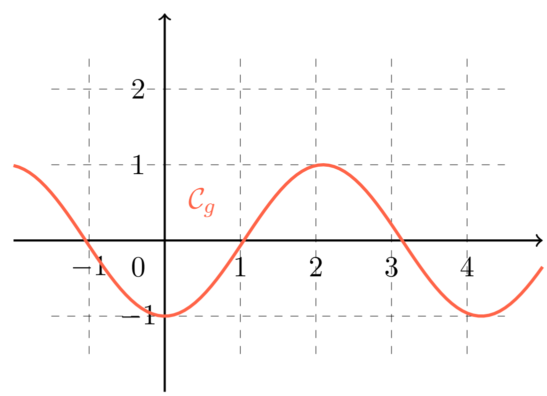
Exercice n°2 Pour chacun des cas suivants, déterminer $f''(x)$:

a. $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$ **b.** $f(x) = xe^x$ **c.** $f(x) = \cos(2x)$

> Etudier la convexité d'une fonction

Exercice n°3 Pour chacune des fonctions représentées ci-dessous, étudier sa convexité.





Exercice n°4

1. Etudier la convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.
2. Etudier la convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

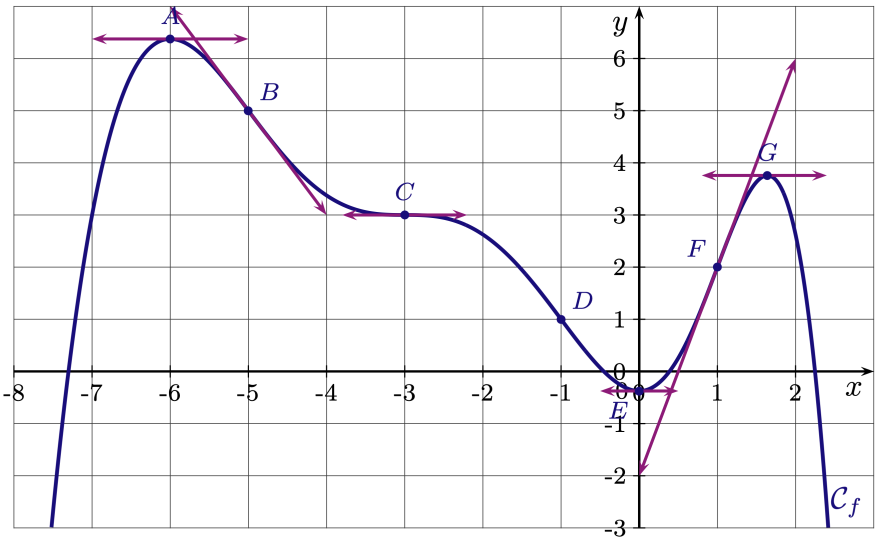
Exercice n°5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

1. Montrer que pour tout réel x no nul : $f''(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$.
2. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. $\mathcal{C}_f$ possède-t-elle des points d'inflexion ?

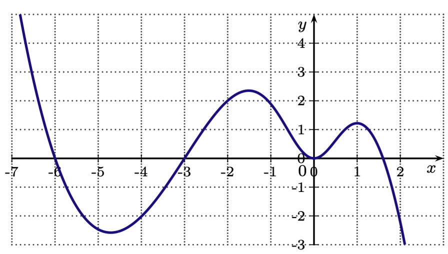
Exercice n°6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.

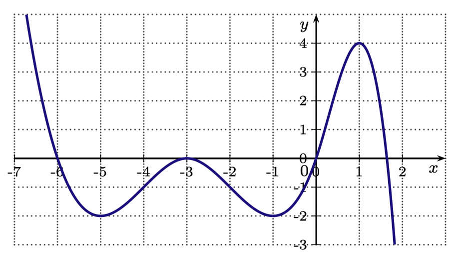
1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x on a $f''(x) = 20x^2(x-3)$.
2. Dresser le tableau de signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire l'existence d'un unique point d'inflexion et en donner les coordonnées.
4. Etudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

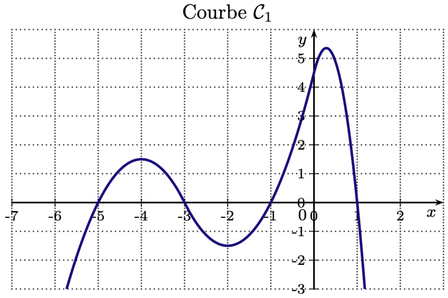
Exercice n°7 On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

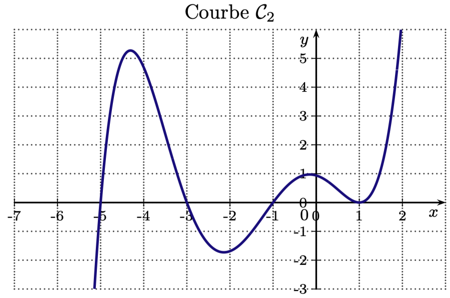


1. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point F$(1\,;\,2)$ passe par $(0\,;\,-2)$. Déterminer $f'(1)$.
2. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point D a pour équation $y = -2x - 1$. Déterminer $f'(-1)$.
3. Déterminer $f'(-5)$ et $f''(-5)$.
4. Une des quatre courbes ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre celle de f''. Déterminer la courbe qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f''.


Courbe $\mathcal{C}_1$


Courbe $\mathcal{C}_2$


Courbe $\mathcal{C}_3$


Courbe $\mathcal{C}_4$

> Résoudre des problèmes, établir des inégalités

Exercice n°8

Une entreprise fabrique des clé USB avec un maximum de 10 000 unités par moi. Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par $C(x) = 0,005x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$ pour $x \in [0\,;\,10]$.

1. En traçant la courbe représentative de la fonction f sur un logiciel, conjecturer la convexité de la fonction C.
2. En déduire si la courbe possède un point d'inflexion ou non.
3. Démontrer ces résultats.
4. A partir de combien de clés produites la croissance du coût de fabrication s'accélère-t-elle ?

Exercice n°9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.

1. Etudier la convexité de la fonction f sur son ensemble de définition.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.
3. En déduire que pour tout réel x négatif on a $x^3 - 2x^2 \leqslant 7x + 4$.

Exercice n°10 Le but de cet exercice est de montrer que pour tout réel x :

$$e^x \geqslant x + 1$$

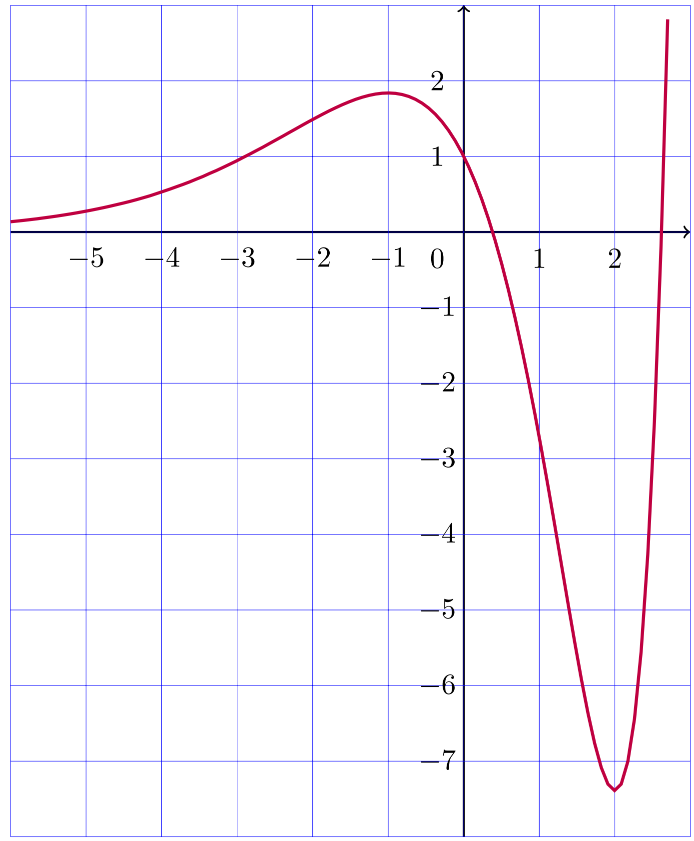
Soit f la fonction définie sur $\mathcal{R}$ par $f(x) = e^x$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. En déduire que pour tout réel x on a $e^x \geqslant x + 1$.

Exercice n°11 Voir l'énoncé sur la page suivante.

Exercice n°11 Le plan est muni d'un repère orthogonal.

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Partie A

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f'.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^x$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction f.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Montrer que pour tout réel x, $f''(x) = (x+1)(x-2)e^x$.
6. Etudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
7. Montrer que, pour tout $x \in [-1\,;\,2]$, on a $f(x) \leqslant x + 6$.