

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. $(kx)^2 + (ky)^2 = k^2x^2 + k^2y^2 = (x^2 + y^2)k^2 = z^2k^2 = (kz)^2$.

Le triplet $(kx; ky; kz)$ est donc bien un triplet pythagoricien.

2. Puisque m est impair, il s'écrit sous la forme $m = 2k + 1$ où k est un entier naturel.

Ainsi, $\frac{m^2 - 1}{2} = \frac{(2k + 1)^2 - 1}{2} = 2k^2 + 2k$ et $\frac{m^2 + 1}{2} = \frac{(2k + 1)^2 + 1}{2} = 2k^2 + 2k + 1$.

$$(2k + 1)^2 + (2k^2 + 2k)^2 = 4k^4 + 8k^3 + 8k^2 + 4k + 1.$$

$$\text{Et } (2k^2 + 2k + 1)^2 = 4k^4 + 8k^3 + 8k^2 + 4k + 1.$$

Ainsi, $(2k + 1; 2k^2 + 2k; 2k^2 + 2k + 1)$ est un triplet pythagoricien.

En prenant des valeurs de k entre 1 et 3 on trouve les triplets $(3; 4; 5)$, $(5; 12; 13)$ et $(7; 24; 25)$.

3. Raisonnons par l'absurde.

D'après la première question, si $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien, alors $(kx; ky; kz)$ l'est aussi.

En posant $x = m$, $y = \frac{m^2 - 1}{2}$, $z = \frac{m^2 + 1}{2}$ et $k = 2$, on montre que $(2m; m^2 - 1; m^2 + 1)$ est aussi un triplet pythagoricien.

4. Soit p un nombre premier tel que $p|x$ et $p|y$.

Puisque x et y sont de parité différente, p ne peut être égal à 2.

Puisque $x^2 + y^2 = z^2$ alors $p|z$ et donc $p|x + z$ et $p|z - x$.

Mais $x + y = 2r^2$ et $z - x = 2s^2$ on a donc $p|2r^2$ et $p|2s^2$. Puisque p est impair, il faut donc que $p|s^2$ et $p|r^2$. De ce fait, $p|s$ et $p|r$.

Mais puisque r et s sont des nombres premiers, on arrive à une contradiction.

Avec $r = 2$ et $s = 1$ on trouve le triplet $(3; 4; 5)$.

Avec $r = 3$ et $s = 2$ on trouve le triplet $(5; 12; 13)$.

Avec $r = 4$ et $s = 1$ on trouve le triplet $(15; 8; 17)$.

Avec $r = 4$ et $s = 3$ on trouve le triplet $(7; 24; 25)$.

Avec $r = 5$ et $s = 2$ on trouve le triplet $(21; 20; 29)$.

En réalité, tous les triplets pythagoriciens primitifs sont de la forme

$$\begin{cases} x &= r^2 - s^2 \\ y &= 2rs \\ z &= r^2 + s^2 \end{cases}$$

où r et s sont des entiers de parité opposée et tels que $\text{PGCD}(r; s) = 1$ et r et s sont des entiers strictement positifs.